த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 786

கணிதவியல் நெறிப்படுத்துதல்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

டாக்டர் அ. ராமகிருஷ்ணன், எம்.ஏ., எம்.எஸ்சி., பிஎச்.டி.,
டிப்ளமா இன் ரஷியன், ஹிந்தி பிரவீன்,
கணிதத் துறை,
பொறியியல் கல்லூரி,
கிண்டி, சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition — January, 1978
Number of Copies—2000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 786

© Government of Tamilnadu

MATHEMATICAL PROGRAMMING

DR. A. RAMAKRISHNAN

Price Rs. 8-25

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by

SAKTHI PRESS,
No. 6, Arunachala Achari Street,
Madras-600 005.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேழாண்டு கள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழி லேயே கற்று வந்தனர். **1969**ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர் களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற் கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத்திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர் களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சி யைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இருவகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **கணிதவியல் நெறிப்படுத்துதல்** என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **786**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **821** நூல்கள் வெளிவந் துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச் சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள் அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்த தாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவி களுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
தோற்றுவாய்		...	1
0·1	நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை—வரையறை	...	1
0·2	வரலாறு	...	2
0·3	நூலின் சுருக்கம்	...	6
0·4	தேவை நோக்கீட்டு நூல்கள்	...	9
1.	**தேவையான அடிப்படை கணித விளைவுகள்**	...	**10**
1·1	அணிகளும் அணிக் கோவைகளும்	...	10
1·2	வெக்டர்களும் வெக்டர் வெளிகளும்	...	16
1·3	குவிகணங்கள்	...	23
1·4	நேரியச் சமனின்மைகள்	...	28
1·5	ஒருங்கமை நேரியச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்	...	32
1·6	இருபடி அமைப்புகள்	...	38
1·7	குவிச் சார்புகள்	...	41
1·8	சரிவு வெக்டரும் சேணப் புள்ளியும்	...	47
1·9	கூஹ்ன்-டக்கர் கட்டுப்பாடுகள்	...	51
	பயிற்சிகள்	...	62
2.	**நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை-பொதுவுரு**	...	**66**
2·1	நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் வரையறை	...	66
2·2	நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வின் சில பண்புகள்	...	67
2·3	கோடிப் புள்ளித் தீர்வுகளைப் பிறப்பித்தல்	...	77
	பயிற்சிகள்	...	82
3.	**சிம்ப்ளக்ஸ் முறை**	...	**83**
3·1	அறிமுகம்	...	83
3·2	மேலும் சில விவரங்களும் தேற்றங்களும்	...	94
3·3	கணக்கீட்டு முறைகள்	...	102
3·4	கணக்கீட்டு முறைகள் (தொடர்ச்சி)	...	108
3·5	செயற்கை மாறிகளும் முதனிலை செய்தக்க தீர்வும்—ஆர்டன் முறை	...	122
	பயிற்சிகள்	...	139

பக்கம்

4. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் இருமைப் பண்புகளும் இருமைத் தேற்றங்களும் ... 145

4·1 முதன்மை-இருமைப் பிரச்சினைகள் ... 145
4·2 இலெம்கேயின் இருமை—சிம்ப்ளக்ஸ் முறை ... 156
4·3 எடுத்துக்காட்டுகள் ... 159
பயிற்சிகள் ... 166

5. போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகள் ... 170

5·1 போக்குவரத்துப் பிரச்சினை—பொது அமைப்பு ... 170
5·2 போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் செய்தக்க தீர்வுகள்-வடமேற்கு மூலை விதி ... 172
5·3 கேடுறு நிலை-∈ உலைவு முறை ... 182
5·4 போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளை அமைத்தல் ... 185
5·5 முதனிலை செய்தக்க தீர்வு காணும் முறைகள் ... 190
5·6 கணக்கீட்டு முறைகள்-மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு காணல் ... 195
பயிற்சிகள் ... 203

6. துணையலகு நெறிப்படுத்துதல் ... 208

6·1 வரையறை ... 208
6·2 குறிக்கோள் சார்பின் துணையலகு ... 208
6·3 துணையலகும் இருமைப் பண்பும் ... 213
6·4 எடுத்துக்காட்டுகள் ... 216
பயிற்சிகள் ... 232

7. திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை ... 233

7·1 முன்னுரை ... 233
7·2 தன்மாற்று அணிமுறை ... 234
7·3 தன்மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பு ... 249
7·4 கணக்கீட்டு முறை—ஓர் எடுத்துக்காட்டு ... 253
பயிற்சிகள் ... 264

8. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் கணக்கீடுகளுக்கான புரோகிராம்களின் நிருவாகம் ... 266

8·1 நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளை அமைத்தல் ... 266
8·2 புரோகிராம்களில் உட்புகும் தகவல்கள் ... 271
8·3 புரோகிராம்களிலிருந்து வெளிவரும் தகவல்கள் ... 274
8·4 இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வின் பின்னுய்வு ... 275

		பக்கம்
9.	இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை	... 277
9·1	கணிதவியல் நெறிப்படுத்துதல்-பொதுவமைப்பு	... 277
9·2	இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை—வரையறை	... 277
9·3	இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான தீர்வின் சில பண்புகள்	... 279
9·4	இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு காணல்—உல்ஃப் முறை	... 282
9·5	இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு காணல்—பீல் முறை	... 290
	பயிற்சிகள்	... 297
10.	நேரியவல்லாத நெறிப்படுத்துதல் – சில சிறப்பு முறைகள்	... 299
10·1	முன்னுரை	... 299
10·2	பிரித்து நெறிப்படுத்துதல்	... 299
10·3	முழுவெண் நெறிப்படுத்துதல்	... 304
10·4	கூறுக்கச் சிதைவு	... 316
10·5	புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல்	... 324
	விடைகள்	... 330
	கலைச்சொற்கள்	... 335

தோற்றுவாய்

0-1. நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை — வரையறை

ஒரு நாட்டின் அரசியல், பொருளாதாரம் அல்லது பண்பாடு நெருக்கடியான நிலைமையில் அகப்பட்டுக்கொள்ளும்போது அந்த நெருக்கடியைச் சமாளிக்க நாட்டின் பல்வேறு துறை வல்லுநர்களும் ஒன்றுகக் கூடிப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண முயல்வது இயற்கை. இம்மாதிரியான முயற்சிகளின் காரணமாகப் பிரச்சினைகளை அணுகும் நோக்கில் சிறந்த பல முன்னேற்றங்களும் பல புதிய கண்டுபிடிப்புகளும் நிகழ்கின்றன. இரண்டாவது உலகப் பெரும் போரின் (1939–45) காரணமாக உருவான பல சிக்கல்களுக்குத் தீர்வு காண முற்பட்டபோது விஞ்ஞானத்தின் புதியவொரு துறைக்கு வித்திடப்பட்டது. கணிதம், இயற்பியல், பொறியியல், புள்ளியியல், பொருளாதாரம், சமூகவியல், தொழில் துறை, வணிகவியல் ஆகிய பல்வேறு துறைகளின் ஒருங்கிணைப் பாகத் தோன்றியதே தற்காலம் மிகவும் பிரபலமாகியுள்ள **செயல் முறை ஆய்வு** (Operations Research) ஆகும்.

பிரச்சினை எதுவாயினும் அதைச் சில மாறிகள் மூலமாகவும் அம் மாறிகள் நிறைவு செய்யும் சில கட்டுப்பாடுகள் மூலமாகவும் எழுதலாம். எடுத்துக்கொண்ட பிரச்சினைக்கு இந்த விதத்தில் தரப்படுகின்ற விளக்கத்தை அப் பிரச்சினையின் **கணித மாதிரி** (Mathematical model) என்கிறோம். இக் கணித மாதிரிக்குத் தீர்வு கண்டு, அதன் வழியாக எடுத்துக்கொண்ட பிரச்சினையின் தீர்வை ஏதோவோர் ஒப்புக்கொள்ளக்கூடிய அடிப்படையில் மாற்றி அமைக்கிறோம். சுருங்கக் கூறின், இதுவே செயல்முறை ஆய்வின் முக்கிய நோக்கம் ஆகும்.

செயல்முறை ஆய்விற்கான கணித மாதிரி $x_1, x_2, \ldots x_n$, என்ற மாறிகளில்

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \lesseqgtr 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots m)$$

என்னும் m கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டதாக இருந்து $f(x_1, x_2, \ldots,$ $x_n)$ என்ற சார்பின் மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு மதிப்புக் காண

வேண்டும் என்பதாக இருப்பின் பிரச்சினையை **நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை** (Programming problem) என்கிறோம். f, g_i என்ற சார்புகள் அனைத்தும் நேரியச் (Linear) சார்புகள் என்றால் **நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை** (Linear programming problem) கிடைக்கிறது. f மட்டுமோ அல்லது g_i-களும் கூட நேரியவல்லாத சார்புகள் என்றால் **நேரியவல்லாத நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை** (Non-linear programming problem) கிடைக்கிறது. இவ்விரு வகைப் பிரச்சினைகளையும் பொதுவாகக் **கணிதவியல் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகள்** (Mathematical programming problems) என்று கூறுவதுண்டு.

நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளில் மாறிகள் குறை மதிப்புகளை ஏற்கும்போது நடைமுறையில் அவற்றிற்குத் தகுந்த பொருளும் விளக்கமும் இல்லை என்ற காரணத்தால், பொதுவாக மாறிகள் அனைத்துமே குறையல்லா எண்கள் என்று எடுத்துக்கொள்ளப் படுகின்றன. இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு (Optimum solution) அதாவது மீப்பெரும அல்லது மீச்சிறுமத் தீர்வுக்கான மதிப்பு காணப்படவேண்டிய சார்பு f-ஐ குறிக்கோள் சார்பு (Objective function) என்று கூறுகிறோம். பல தொழில்துறை அல்லது வணிகவியல் பிரச்சினைகளில் இச் சார்பு செலவுகளைக் (Costs) குறிப்பதால் இதைச் செலவுச் சார்பு (Cost function) என்றும், இதில் வரும் மாறிகளின் கெழுக்களைச் (Coefficients) செலவுக் கெழுக்கள் என்றும் கூறுவதுண்டு.

0-2. வரலாறு

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை முதன் முதலில் 1947 ஆம் ஆண்டு ஜார்ஜ் பி. டான்சிக் (George B. Dantzig), மார்ஷல் உட் (Marshall Wood) என்பவர்களால் அமெரிக்க விமானப் படைத் துறையைச் சார்ந்த விஞ்ஞானிகளின் துணைகொண்டு அமைக்கப் பட்டது. துருப்புகளின் தேவைகளைக் கணக்கிட்டு, அவற்றிற் கான திட்டங்களை வகுப்பதில் கணித மாதிரிகளை அமைக்க முயலும் போது நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக அவை உருப்பெற்றன. இதற்கும் முன்னரே எல். வி. கண்டரோவிச் (L.V. Kantorovich) என்னும் உருசிய (Russian) கணித மேதை 1939-ல் இம்மாதிரிப் பிரச்சினைகளை உருவாக்கினர் என்றாலும் அமெரிக்கர்கள் இதை அறிந்திருக்கவில்லை. இருப்பினும் 1951-ல் டான்சிக் அவர்கள் கட்டுரை ['Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities' Activity Analysis of Production and Allocation, Chapter XXI, edited by T. C. Koopmans, John Wiley & Sons, Inc., New York (1951) - Cowles Commission

Monograph No. 13] வெளியான பிறகே நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை களில் தீவிரமான கவனம் செலுத்தப்பட்டது. இந்தக் கட்டுரையில் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்கு முறையாகத் தீர்வுகாணும் வழி விளக்கப்பட்டது. அவருடைய சிம்ப்ளக்ஸ் (Simplex) முறை மிகவும் பயனுடையது என்பது காலத்தால் நன்கு நிரூபிக்கப் பட்டுவிட்டது.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறை வெளியிடப்படுவதற்கு முன்னரே பல நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகள் அமைக்கப்பட்டும்கூட தீர்வு காண இயலாமையால் அரைகுறையாக விடப்பட்டன. இவற்றுள் இட்ச் காக்கின் [Hitchcock, F.L., Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, Journal of Mathematical Physics, Vol. 20 (1941)] போக்குவரத்துப் பிரச்சினையும், இப் பிரச்சினையை டி. சி. கூப்மான்ஸ் (T. C. Koopmans) என்பவரும் சுயேச்சையாகக் கண்டார் (1947). ஸ்டிக்ளர் [Stigler, G. J., The Cost of Subsistence, Journal of Farm Economics, Vol. 27 (1945)] என்பவரின் திட்ட உணவுப் பிரச்சினையும் (Diet Problem) குறிப் பிடத் தக்கவை.

மின்விசையால் செயல்படும் அதிக வேகம் பெற்ற கம்ப் யூட்டரை 1952-ல் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் தீர்வு காண்பதற்கு முதன்முதலில் வெற்றிகரமாகப் பயன்படுத்தினர். அது முதற்கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் கணக்கீட்டு முறையும் அதன் பல்வேறு உருமாற்றங்களும் சங்கேத மொழியில் (Codes) எழுதப் பட்டு சிறியதும் பெரியதுமான கம்ப்யூட்டர்களில் பயன்படுத்தப் பட்டு வருகின்றன. தற்கால அறிமுறை (Theoretical) கணிதத் திலும், செய்முறை (Practical) கணிதத்திலும் நேரிய நெறிப் படுத்துதல் இன்றியமையாத, பயனுள்ள சாதனமாக நிலைபெற்று விட்டது. இந்தச் சிறப்பான—அதுவும் குறுகிய காலத்தில்— வளர்ச்சிக்குப் பல ஆய்வாளர் குழுக்களும், ஆய்வுக்கூடங்களும், நிறுவனங்களும் துணை புரிந்துள்ளன. டான்சிக், உட், ஆர்டன், கெய்ஸ்லர், உல்ஃப், பீல், மில்லர், பெல்மான் ஆகியோரும், ராண்ட் கார்ப்பொரேஷன் (RAND Corporation), பிரின்ஸ்டன் பல்கலைக்கழகம், ஸ்கூப் அமைப்பு (SCOOP – Scientific Computation of Optimum Programs—Project), அமெரிக்க ஆகாய விமானப்படைத் துறை, C. E. I. R. Ltd., நிறுவனம் ஆகிய நிறுவனங்களும் குறிப்பிடப்பட வேண்டும்.

நேரியவல்லாத பிரச்சினைகளில் ஆய்வாளர்களின் கவனத்தை ஈர்த்தது கூஹ்ன்-டக்கர் அவர்களால் 1951-ல் வெளியிடப்பட்ட

கட்டுரையாகும். [Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, Non-linear Programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, Calif. (1951)]. குறிக்கோள் சார்பைப் பிரிக்கவல்ல சார்பாக எடுத்துக்கொண்டு சார்ன்ஸ்—இலெம்கே என்பவர்கள் 1954-ல் பிரித்து நெறிப்படுத்துதல் முறைக்குக் கால்கோள் செய்தனர். (Charnes, A. and Lemke, C., Minimization of Non-linear Separable Convex Functionals, Naval Research Logistics Quarterly, 1, 1954, pp. 301—312). பின்னர் மில்லர் (Miller, C.) என்பவரும், டான்சிக்கும் இம் முறையை மேலும் வலுவுறச் செய்தனர். இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளில் 1955-க்குப் பிறகே கவனம் செலுத்தப்பட்டது. குறிப்பாக பீல் (E. M. L. Beale), ஃபிராங்க் (M. Frank), உல்ஃப் (P. Wolfe), ஹில்ட்ரத் (C. Hildreth), ஹவுதாக்கர் (H. Houthakker), மார்க்கோவிட்ஸ் (H. Markowitz), பாரங்கன் (E. Barankan), டார்ஃப்மான் (E. Dorfman) ஆகியோர் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்கான தீர்வுகளைப் பல்வேறு முறைகளில் கண்டறிந்தனர். முழுவெண் தீர்வுகள் காணும் முயற்சி முதன்முதலில் டான்சிக், ஃபுல்கர்சன் (Fulkerson, D. R.), ஜான்சன் (S. Johnson) ஆகியோரால் 1954-ல் மேற்கொள்ளப்பட்டது. [Solution of a Large Scale Travelling Salesman Problem, Journal of the Operations Research Society of America, 2 (1954), pp. 393—410] மார்கோவிட்ஸ்-மான் (Markowitz, H. and Manne, A. S. On the Solution to Discrete Programming Problems, Econometrica, 25, 1957, pp. 84—110) என்பவர்களும் கோமரி [Gomory, R. Essentials of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, Bulletin of American Mathematical Society, 64 (1958), pp. 275—278 and an Algorithm for Mixed Integer Problem, RM 2597, The RAND Corporation (1960)] என்பவரும் முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்கான கணக்கீட்டு முறைகளைக் கொடுத்தனர்.

துணையலகு நெறிப்படுத்துதல் முறைகளைப் பற்றிய விரிவான ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகள் காஸ்-சாடி [Gass, S. I. and Saaty, T. L., The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 2 (1955) and Parametric Objective Function, Part II: Generalization, Journal of the Operations Research Society of America, Vol. 3 (1955)] அவர்களால் முதலில் வெளியிடப்பட்டன. கூறுக்கச் சிதைவு (decomposition) முறைகள் டான்சிக் என்பவராலும் [Dantzig, G. B., On the Status of Multistage Linear Programming Problems

RAND Report, p-1028; The RAND Corporation, Santa Monica, Calif. (1959); also in Management Science, Vol. 6, No. 1 (1959)], கோமரி [Gomory, R.E., Large and Non-convex Problems in linear Programming, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 15 American Mathematical Society (1963)] என்பவராலும் ஆராயப்பட்டன. புள்ளியியல் முறைகளை உட்புகுத்தி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் தீர்வுகாணும் வழிமுறைகள் 1955-ல் வகுக்கப்பட்டன. இந்தத் துறையில் பீல் என்பவரின் [On minimizing a convex function subject to linear equalities, Journal of the Royal Statistical Society (B), 17, pp. 173-184 (1955)] கட்டுரையும், டான்சிக்கின் [Linear Programming under uncertainty Management Science, 1 (1955), pp. 197-206] கட்டுரையும் முன்னோடியானவை.

இயக்கவியல் நெறிப்படுத்தும் (Dynamic Programming) பிரச்சினைகள் பெரும்பாலும் ரிச்சர்டு பெல்மான் (Richard Bellman) என்ற தனி மனிதரின் முயற்சியாலேயே 1950-ல் இருந்து தொடங்கப்பட்டு சுமார் 100 ஆய்வுக் கட்டுரைகளில் ஆராயப்பட்டுள்ளன. 1957-ல் இவர் வெளியிட்ட 'Dynamic Programming' (Princeton, N.J., Princeton University Press) என்ற நூலில் இக் கட்டுரைகளின் சுருக்கம் உள்ளது.

கடந்த 10 ஆண்டுகளில் நெறிப்படுத்துதல் தொடர்பாகவும், நெறிப்படுத்துதல் பிரச்சினைகளுக்கான கம்ப்யூட்டர் சங்கேத மொழிகள் எழுதப்படுவது குறித்தும் ஏராளமான கட்டுரைகள் வெளியாகிக்கொண்டிருக்கின்றன. இத் துறைக்காகவே தனியான கணித சஞ்சிகைகளும் வெளிவரத் தொடங்கியுள்ளன. நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகள் எத் துறைகளில் நிகழ்கின்றன, அவற்றிற்கான தீர்வுகள் எவ்வாறு காணப்படுகின்றன என்பதற்கான குறிப்புகள் காஸ்-ரிலே [S. I. Gass and Vera Riley : Bibliography on linear Programming and related Techniques, Johns Hopkins Press, Baltimore (1958)] அவர்களால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நெறிப்படுத்துதலை ஆங்கிலத்தில் 'Programming' என்று கூறுகிறோம். இந்தச் சொல் 1947-ல் பயன்படுத்தப்பட்டபோது கம்ப்யூட்டருக்கான புரோகிராம்கள் (Programs) சங்கேத மொழிகள் (Codes) என்றே வழங்கப்பட்டுவந்தன. எனவே, எந்தவிதக் குழப்பமும் ஏற்பட வாய்ப்பில்லாமல் இருந்தது. ஆனால் துரதிர்ஷ்டவசமாகப் பின்னர் நெறிப்படுத்துதல், கம்ப்யூட்டருக்கான சங்கேத

மொழிகள் எழுதுதல் ஆகிய இரண்டிற்குமே 'Programming' என்ற சொல் நிலைத்துவிட்டது. இதனாலேயே பலர் கணிதவியல் நெறிப் படுத்துதல் (Mathematical programming) என்றாலே கம்ப்யூட்டர் களுக்குப் புரோகிராம்கள் (Programs) எழுதுவது என்று நினைக்க இடமேற்பட்டுவிட்டது. கம்ப்யூட்டருக்குப் புரோகிராம் எழுதி அதை நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் தீர்வைக்காண ஒரு கருவியாக மட்டுமே பயன்படுத்துகிறோம் என்பதும், எனவே, அதுவே நமது முழுக்குறிக்கோள் அல்ல என்பதும், நினைவிற் கொள்ள வேண்டும்.

0-3. நூலின் சுருக்கம்

இந்த நூலில் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்கும், சில வகையான நேரியவல்லாத நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்கும் தீர்வுகாணும் முறைகள் விளக்கப்படுகின்றன. இந் நூலை எழுது வதில் பல்வேறு ஆங்கில மூல நூல்களின் துணையை நாடியுள்ளேன். இவை எல்லாவற்றையும் தனித்தனியே குறிப்பிடத் தேவையில்லை என்றாலும், சிறப்பாக S. I. Gass, E. M. L. Beale, G. Hadley, A. M. Glicksman ஆகியோரின் நூல்களைப்பற்றி நான் குறிப் பிட்டே ஆக வேண்டும். நெறிப்படுத்துதலைப்பற்றி அறிய விரும்பும் மாணவர்கள் இந் நூல்கள் ஒவ்வொன்றையும் நன்கு படித்துப் பயன்பெறவேண்டும் என்பதே என் அவா. இவ்வாசிரியர்கள் அனைவருக்கும் என் நன்றி அறிதலைத் தெரிவித்துக்கொள்கிறேன். (இப் பாட இறுதியில் இவர்கள் எழுதிய நூல்களின் பட்டியல் தரப்பட்டுள்ளது).

பாடம் 1-ல் சில அடிப்படையான கணித விளைவுகளும், பின்னர் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாணப் பயன் படுத்தப்படும் தேற்றங்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அணிகள், அணிக்கோவைகள், வெக்டர்கள், வெக்டர் வெளிகள், குவிகணங்கள் ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள், சமனின்மைகள் ஆகியவை இப் பாடத் தின் முதல் ஐந்து பகுதிகளில் விளக்கப்பட்டுள்ளன. இவை யாவும் நேரிய நெறிப்படுத் தும் பிரச்சினைக்குத் தீர்வுகாண முற்படும்போது தேவைப்படுகின்றன. நேரியவல்லாத நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை களை, குறிப்பாக, இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை, நன்கு புரிந்துகொள்ள இருபடி அமைப்புகள் (Quadratic forms), குவிச் சார்புகள் (Convex functions), சரிவு வெக்டர் (Gradient vector), கூஹ்ன்-டக்கர் கட்டுப்பாடுகள் முதலியன தேவைப்படுகின்றன. இவை முதல் பாடத்தின் கடைசி நான்கு பகுதிகளில் விவரிக்கப் பட்டுள்ளன.

இரண்டாவது பாடம் தொடங்கி ஏழாவது பாடம் வரை நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை விரிவாக விளக்கப்படுகிறது. பாடம் 2-ல் பிரச்சினையின் பொதுவமைப்பும், பாடம் 3-ல் இப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண உதவும் அடிப்படையான சிம்ப்ளக்ஸ் முறையும் (Simplex method) விவரிக்கப்படுகின்றன. சில எடுத்துக்காட்டுகளுடன் கணக்கீடுகளும் (Calculations or computations or algorithms) விரிவாகத் தரப்பட்டுள்ளன. பாடம் 4-ல் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் இருமைப்பண்புகளும் (dual properties) அவற்றிற்கான சில தேற்றங்களும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கணித மாணவர்களுக்கு இது மிகவும் சுவையான பகுதியாகும்!

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் ஒரு தனிப்பட்ட வகையாகப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகள் (transportation problems) அமைகின்றன. இவற்றிற்கான தீர்வுகள் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையிலேயே காணப்படுகின்றன என்றாலும் அது வழக்கமான முறையிலிருந்து மாறுபட்டது ஆகும். போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளுக்கானச் சிறப்பான கணக்கீட்டு முறைகள் பாடம் 5-ல் தரப்பட்டுள்ளன. பாடம் 6-ல் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளில் மாறிகள் அல்லாமல் வருகின்ற துணையலகுகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களுக்கு ஏற்றவாறு எவ்வாறு பிரச்சினையும் அதன் தீர்வும் மாறுபாடு அடைகின்றன என்பது பற்றி விளக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த முறைகளைத் துணையலகு நெறிப்படுத்துதல் (Parametric Programming) என்று கூறுவது வழக்கம்.

பாடம் 7-ல் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் கணக்கீடுகள் நடைமுறையில் எவ்வாறு செய்யப்படுகின்றன என்பது பற்றியும் பெரிய பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாணும் போது கணக்கீடுகளின் அமைப்புகள் எவ்வாறு மாறுபடுகின்றன என்பதுபற்றியும் கூறப்படுகிறது. திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறையும் (Revised simplex method) அதன் இரு அமைப்புகளான தன்மாற்று அணி (Matrix inverse) தன்மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பு (Product form of the inverse) ஆகியவைகள் விளக்கப்படுகின்றன.

மாறிகள் கட்டுப்பாடுகள் ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருக்கும்போது மனித உழைப்பினாலேயே தீர்வு காண்பது கடினமானது; சிக்கலானதும்கூட. எனவே, பொதுவாக, நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாண விழையும் போது கம்ப்யூட்டர்களின் உதவியை நாடவேண்டியுள்ளது. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்கு கம்ப்யூட்டர்களைப் பயன்

படுத்தும்போது அவற்றிற்கான புரோகிராம் சங்கேத மொழிகள் (Program Codes) எழுதப்பட வேண்டும். இதைக் கருத்தில் கொண்டு நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளை அமைக்கும் முறைகளும், கம்ப்யூட்டரில் உட்புகும் தகவல்கள், கம்ப்யூட்டரிலிருந்து வெளிவரும் தகவல்கள் (Input and Output), இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வின் பின்னுய்வு (Post-optimal analysis) ஆகியவை மிகச் சுருக்கமாகப் பாடம் 8-ல் தரப்பட்டுள்ளன.

கடைசி இரண்டு பாடங்கள் நேரியவல்லாத நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளைப் பற்றியவை. பாடம் 9-ல் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை (Quadratic Programming) ஓரளவு விரிவாக விளக்கப் பட்டுள்ளது. பாடம் 10-ல் பிரித்து நெறிப்படுத்துதல் (Separable Programming), முழுவெண் நெறிப்படுத்துதல் (Integer Programming), கூறுக்கச் சிதைவு (Decomposition), புள்ளியியல் நெறி படுத்துதல் (Stochastic Programming) ஆகிய நான்கும் சுருக்கமாக வரையறுக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் ஒரு சில சிறப்புப் பண்புகளும் பயன்பாடுகளும் விளக்கப்படுகின்றன.

இந்த நூலில் இயக்கவியல் நெறிப்படுத்துதல் முறைகள் இடம் பெறவில்லை. இவற்றைப் பற்றி அறிய விரும்புபவர்கள் பெல்மானின் §0-2-ல் குறிப்பிடப்பட்ட நூலைப் படித்துப் பயன் பெறலாம்.

தேவையான இடங்களில் வடிவ கணித விளக்கமும் எடுத்துக் காட்டுகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பாடமும் பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. சமன்பாடுகள், அட்டவணைகள், படங்கள், ஆகியவற்றிற்குத் தனித்தனியே ஒவ்வொரு பாடத்திலும் அப் பாடத்தின் எண்ணுடன் தொடர்ச்சியாக வரிசை எண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. எடுத்துக்காட்டாக சமன்பாடு (7-23) என்பது பாடம் 7-ன் 23-வது சமன்பாட்டையும், அட்டவணை (5-13) என்பது பாடம் 5-ன் 13-வது அட்டவணையையும் குறிக்கின்றன. § 1-5 என்பது பாடம் 1-ன் பகுதி 5-ஐக் குறிக்கும். வெக்டர்களும் அணிகளும் புத்தகம் முழுவதும் சாய்வு (italic) எழுத்துகளால் குறிக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு பாடத்தின் இறுதியிலும் பயிற்சிகள் தரப்பட்டுள்ளன. இவை பெரும்பாலும் எளிதானவை. அந்தந்தப் பாடத்தில் விவரிக்கப்பட்ட கணக்கீடுகளையும் வரையறைகளையும் சரிவரப் புரிந்துகொள்ள இவை உதவும். இப் பயிற்சிகள் பெரும்பாலும் பல்வேறு வினுத்தாள்களிலிருந்தும், நூல்களில் இருந்தும் தொகுக்கப்பட்டவையே.

0·4. தேவை நோக்கீட்டு நூல்கள் (Books of Reference)

இப் புத்தகம் எழுதுவதற்குத் துணைபுரிந்த நூல்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

1. E. M. L. BEALE — 'Mathematical Programming in Practice, Sir Isaac Pitman & Sons Ltd., London (1968)'.

2. C. E. FROBERG — 'Introduction to Numerical Analysis, Addison Wesley Publishing Co. (1965)'.

3. S. I. GASS — 'Linear Programming, Methods and Applications, McGraw Hill Book Co., New York. 3rd edition (1969)'.

4. A. M. GLICKSMAN — 'An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games, John Wiley and Sons, Inc., New York (1963)'.

5. G. HADLEY — 'Linear Programming, Addison-Wesley Publishing Coy. (1962)'.

6. G. HADLEY — 'Non-linear and Dynamic Programming, Addison-Wesley Publishing Coy. (1964)'.

7. G. HADLEY — 'Linear Algebra, Addison-Wesley Publishing Coy. (1954)'.

தேவையான இடங்களில் மூலக்கட்டுரைகள்பற்றிய விவரங்களும் அடைப்புகளில் தரப்பட்டுள்ளன. § 10·5 ஐத் தவிர மற்ற விடத்து புள்ளியியல் வினவுகள் பயன்படுத்தப்படவில்லை. இந்தப் பகுதிக்குத் தேவையான புள்ளியியல் அறிவு மிகவும் குறைவானது என்றாலும் அது இல்லாமல் இப் பகுதியைப் புரிந்துகொள்வது கடினமே. தேவையான விவரங்களைப் புள்ளியியல் முறைகளை விவரிக்கும் நூல் ஏதாவதொன்றிலிருந்து அறியலாம்.

1. தேவையான அடிப்படை கணித விளைவுகள்

(Necessary Basic Mathematical Results)

இந்தப் பாடத்தில் சில முக்கியமான கணிதவியல் வரையறைகளும் தேற்றங்களும் கொடுக்கப்படும். குறிப்பாக அணிகள் (Matrices), அணிக்கோவைகள் (Determinants), வெக்டர்கள் (Vectors), வெக்டர் வெளிகள் (Vector spaces), குவிகணங்கள் (Convex sets), மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகள் (Minimum and maximum values) காணும் முறைகள் ஆகியவை விவரிக்கப்படும். நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்கும் (programming problems) அவற்றைச் சார்ந்த கணக்கீடுகளுக்கும் இந்த அடிப்படையறிவு தேவையானதாகும்.

1-1. அணிகளும் அணிக் கோவைகளும்

$a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{mn}$ என்ற mn எண்களை செவ்வக வமைப்பில் m நிரைகளாகவும் (rows), n நிரல்களாகவும் (columns) பின்வருமாறு அமைத்து எழுதப்படுவது அணி எனப்படும் :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

இதிலுள்ள $a_{11}, a_{12}, \ldots$ முதலிய எண்கள் அணியுடைய மூலகங்கள் (elements) எனப்படும். குறிப்பாக a_{ij} என்ற எண் நிரை i-யிலும் நிரல் j யிலும் அமைந்துள்ள மூலகத்தைக் குறிக்கும். அணிகளை ஒரு சாய்வு (italic) எழுத்தாலும் அல்லது அடைப்புகளிட்டும் குறிக்கலாம். மேற்குறிப்பிட்ட அணியை பின்வரும் குறியீடுகளிலும் எழுதலாம் :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

அணி A-ல் $m = n$ எனின் அதைச் சதுர அணி (Square matrix) என்கிறோம். n என்பது இச் சதுர அணியின் வரிசை (Order) எனப்படும். ஒரேவொரு நிரலை மட்டும் கொண்ட அணி நிரல் வெக்டர் எனவும், ஒரேவொரு நிரையைக் கொண்ட அணி நிரை வெக்டர் எனவும் வழங்கப்படும். $(a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots n$ என்ற சதுர அணியில் $a_{ij} = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots n$ என்றால் அது மூலைவிட்ட (Diagonal) அணி எனப்படும். பூச்சியமல்லாத மூலகங்கள் அனைத்தும் 1 என்றுள்ள மூலைவிட்ட அணியை ஓரலகு (Unit) அணி என்கிறோம். n-வது வரிசைபெற்ற ஓரலகு அணியை I_n என்றும் வரிசை குறிப்பிடத் தேவையில்லாதவிடத்து I என்றும் குறிப்பிடு கிறோம். A-ன் நிரல்களை வரிசை பிறழாமல் நிரைகளாகவும், அம்மாதிரியே நிரைகளை நிரல்களாகவும் மாற்றிப் பெறப்படும் அணி அதன் திருப்பு அணியாகும் (Transposed matrix). இத் திருப்பு அணியை A' அல்லது A^T என எழுதுகிறோம். எனவே,

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m நிரைகளையும் n நிரல்களையும் பெற்றுள்ள அணியின் பரிமாணம் (Dimension) $m \times n$ எனக் குறிக்கப்படும். இரண்டு அணிகள் சமம் எனின் அவற்றின் பரிமாணங்கள் சமமாக இருப்ப துடன் அவற்றின் ஒத்த மூலகங்களும் தனித்தனியே சமமாக வேண்டும். $n \times n$ பரிமாண சதுர அணி (a_{ij})-ல் எல்லா $i > j$-க்கும் (அல்லது எல்லா $i < j$-க்கும்) $a_{ij} = 0$ என்று இருந்தால் அது முக்கோண அணி (Triangular matrix) எனப்படும். எல்லா மூலகங்களும் பூச்சியமாகவுள்ள அணியைப் பூச்சிய அணி என்கிறோம். இதை 0 என்று குறிப்பிடுகிறோம். பூச்சிய அணியின் பரிமாணத்தைத் தேவைக்கேற்ப நம் விருப்பம்போல் மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

அணிகளின் கணத்தில் பின்வரும் கூட்டல், பெருக்கல் செயலிகளை வரையறுக்கிறோம். α என்ற எந்த மெய்யெண்ணுக்கும் αA என்பது A-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் α-ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் அணியாகும்; அதாவது $A = (a_{ij})$ என்றால் $\alpha A = (\alpha\, a_{ij})$ ஆகும். சமபரிமாணமுள்ள இரண்டு அணிகள் $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ கொடுக்கப்பட்டால் $A + B$ என்பது $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, என்ற அதே பரிமாணமுள்ள அணியைக் குறிக்கும். (இந்த வரையறையில் மெய் எண்களின் கூட்டலுக்கான குறியையே அணிகளின் கூட்டலுக்கும் பயன்படுத்தியுள்ளோம். நடைமுறையில் இதனால் எந்தக் குழப்பமும் ஏற்பட வாய்ப்பில்லை). இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல் செயலி பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கிறது.

அணிகளின் கணத்தில் A, B, C என்பன சமபரிமாண அணிகள்; α, β மெய் எண்கள் என்றால்

$$A + B = B + A \quad \text{(இடமாற்று விதி)}$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{(சேர்க்கை விதி)}$$
$$\left.\begin{aligned}(\alpha + \beta)A &= \alpha\, A + \beta\, A\\ \alpha\,(A + B) &= \alpha\, A + \alpha\, B\end{aligned}\right\} \text{(பரவல் விதிகள்)}$$
$$A + 0 = A$$

அணி A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கை அணி B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமானால் அவற்றை இணக்க அல்லது ஒத்த (Conformable) அணிகள் என்கிறோம். இரண்டு ஒத்த அணிகளுக்குப் பெருக்கல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும். $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ என்பன முறையே $m \times p$, $p \times n$ பரிமாணம் பெற்றிருந்தால் (அவை ஒத்த அணிகள் என்பதைக் கவனிக்கவும்)

$$c_{ij} = \sum_{k=}^{p} a_{ik}\, b_{kj}\,, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots m, \\ j = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

என்ற $m\,n$ எண்களைக் கணக்கிடலாம். இந்த எண்களை மூலகங்களாகக் கொண்ட $C = (c_{ij})$ என்ற $m \times n$ பரிமாண அணியை A, B-க்களின் பெருக்கல் அணி என வரையறுக்கின்றோம். இதை AB அல்லது $A.B$ என்று குறிக்கின்றோம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

என்றால்

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

பொதுவாக $AB \neq BA$. மேற்கூறிய எடுத்துக் காட்டில் AB-ன் பரிமாணம் 2×2 ஆகும். ஆனுல் BA-ன் பரிமாணம் 3×3 ஆகும். எனவே அவை சமமாகா. சில அணிகளுக்கு AB வரையறுக்கப்பட்டாலும் BA வரையறுக்கப் படாமலும் இருக்கலாம். 2×4, 4×3 பரிமாணங்களைக் கொண்ட A, B என்ற அணிகளுக்கு AB-யை மட்டுமே 2×3 பரிமாண அணியாக வரையறுக்க முடியும்; BA-யை வரையறுக்க முடியாது. (ஏன்?) எந்த $m \times n$ பரிமாண அணியையும் தகுந்த I ஆல் பெருக்கினுல் அதே அணி பெருக்கற் பலனுகக் கிடைக்கிறது; அதாவது, $A\, I_n = A = I_m\, A$

அணிகளின் பெருக்கல் (வரையறுக்கப்பட்டவிடத்து) பின் வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது :

$$(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$$
$$(A + B)\,C = A\,C + B\,C$$
$$C\,(A + B) = C\,A + C\,B$$
$$\alpha\,(A\,B) = (\alpha A)\;B = A\,(\alpha\,B)$$

இங்கு A, B, C என்ற அணிகள் யாவும் சரியான (பெருக்கலில் உள்ள காரணி அணிகள் இணக்க அணிகளாக இருப்பதற்குத் தேவையான) பரிமாணங்களைப் பெற்றிருக்கின்றன என்றும், α ஏதாவதொரு மெய்யெண் எனவும் கொள்க. எளிதாகப் பின்வரும் கூற்றையும் நிரூபிக்கலாம் :

$$(A\,B)' = B'\,A'$$

ஒவ்வொரு சதுர அணி A-யுடனும் அதன் அணிக் கோவை எனப்படும் ஓர் எண்ணைத் தொடர்புபடுத்துகிறேம். இதை $|\,A\,|$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். கொடுக்கப்பட்ட அணிக்குச் சரியாக அணிக் கோவையை பின் வருமாறு அமைக்கிறேம் :

(i) ஒவ்வொரு நிரைக்கும் ஒவ்வொரு நிரலுக்கும் ஓர் மூலகம் வீதம் அணியின் மூலகங்களை எடுத்து அவற்றின் பெருக்கற்பலனைக் காண்க.

(ii) கிடைத்த ஒவ்வொரு பெருக்கற் பலனுக்கும் + அல்லது— குறியைப் பின்கண்ட விதிக்கிணங்க இடுக: பெருக்கலில் உள்ள மூலகங்களை ஈரிரண்டாகக் கோடுகளால் சேர்த்து வலதுபுறமாக மேல்நோக்கிச் செல்லும் கோடுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படை என்றுல் + குறியையும், மற்ற நிலைகளில் — குறியையும் இடுக.

(iii) குறியோடு பொருத்தப்பெற்ற எல்லா பெருக்கற் பலன் களையும் கூட்டி எழுதுக. இந்தக் கூட்டுத் தொகை அணிக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, 2, 3$ என்னும் 3×3 சதுர அணியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

இங்கு $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$-ன் குறி + ஆகும். ஏனென்றால் (ii)-ல் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை 0 ஆகும். (0–இரட்டைப்படை எண்). ஆனால் $a_{13}\, a_{21}\, a_{33}$-ன் குறி — ஆகும். ஏனென்றால் (ii)-ல் குறிப்பிட்டவாறு மேல்நோக்கிச் செல்லும் கோடு ஒன்றுதான் உள்ளது. இம்மாதிரியே மற்ற உறுப்புகளின் குறிகளையும் சரிபார்க்கலாம்.

அணிக் கோவைகளின் பின்வரும் பண்புகளை வரையறையிலிருந்து எளிதாகப் பெறலாம்:

(1) ஒவ்வொரு அணிக் கோவையிலும், அதன் வரிசை n என்றால் $n!$ பெருக்கற்பலன்கள் அதன் உறுப்புகளாக அமையும். ($n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n\,;\ 0! = 1$)

(2) ஒரு நிரை அல்லது நிரலின் எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியமெனின் அணிக் கோவையின் மதிப்பு 0 ஆகும்.

(3) ஓர் அணியும் அதன் திருப்பு அணியும் சமமான அணிக் கோவைகளைப் பெற்றிருக்கும். அதாவது, $|A| = |A'|$. எனவே, ஓர் அணிக் கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் வரிசை பிறழாமல் மாற்றுவதால் அதன் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

(4) $|A|$ என்ற அணிக் கோவையின் இரு நிரல் (நிரை)களை தம்முள் மாற்றி எழுதுவதால் கிடைக்கும் அணிக் கோவை $|B|$ என்றால் $|B| = -|A|$ ஆகும்.

(5) ஓர் அணிக் கோவையின் இரண்டு நிரல்கள் (நிரைகள்) சர்வ சமமானால், அது பூச்சியமாகும்.

(6) ஓர் அணிக் கோவையின் ஏதாவது ஒரு நிரலின் (நிரையின்) மூலகங்களை k என்ற மாறிலியால் பெருக்கக்

கிடைக்கும் அணிக் கோவையின் மதிப்பு கொடுத்துள்ள அணிக் கோவையின் மதிப்பைக் k-ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும்.

(7) ஓர் அணிக் கோவையின் ஒரு நிரலின் (நிரையின்) எல்லா மூலகங்களுடனும், வேறொரு நிரலின் (நிரையின்) ஒத்த மூலகங்களின் ஒரே மடங்கைக் கூட்டுவதால் கிடைக்கும் அணிக் கோவையின் மதிப்பு முதல் அணிக் கோவையின் மதிப்பேயாகும்.

A-ல் உள்ள பூச்சியமல்லாத மிகப் பெரிய அணிக் கோவையைப் பெற்ற சதுர அணியின் வரிசையை A-ன் தரம் (Rank) என்கிறோம். சதுர அணி A-ன் அணிக்கோவை பூச்சியமானால் அதை ஒருமை யணி (Singular matrix) என்கிறோம். $|A| \neq 0$ என்றால் அதை ஒருமையற்ற (Non-singular) அணி என்று வழங்குகிறோம்.

(a_{ij}) என்ற அணியை A என்று குறிப்பிட்டால் $(-a_{ij})$ என்ற அணியை $-A$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். $A + B = 0$ என்றால் $B = -A$ என்பதைக் கவனிக்கவும்.

ஓர் அணியும் அதன் திருப்பு அணியும் சமம் என்றால் அதைச் சமச்சீர் அணி என்று கூறுகிறோம். அதாவது, A சமச்சீர் அணி என்றால் $A = A'$ ஆகும். ஆனால், $A = -A'$ என்று இருக்கு மானால் A-யை எதிர்ச் சீரணி என்கிறோம். எதிர்ச் சீரணியின் மூலை விட்ட மூலகங்கள் யாவும் பூச்சியமாக வேண்டும். (ஏன்?)

சதுர அணி A-ன் ij-வது மூலகம் a_{ij}-ன் சிற்றணி (Minor) D_{ij} என்பது i-வது நிரை j-வது நிரல் ஆகியவற்றை நீக்கிய பிறகு A-ல் எஞ்சிய அணியாகும். $|D_{ij}|$ என்பது a_{ij} என்ற மூலகத்தின் சிற்றணி கோவையாகும் (Determinant of the minor). $A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |D_{ij}|$ என்பதை மூலகம் a_{ij}-ன் இணைக் காரணி (Cofactor) என்கிறோம். (A_{ij}) என்ற அணியை A-ன் இணைக்காரணி அணி (Matrix of the Cofactors) என்று கூறுகிறோம். இணைக்காரணி அணியின் திருப்பு அணியை A-ன் சேர்ப்பு அணி (Adjoint matrix of A) என்று வரையறுக்கிறோம்.

$A = (a_{ij})$ என்றால் (A_{ij}) இணைக்காரணி அணியாகும். இதன் திருப்பு அணி (A_{ji}) ஆகும். எனவே சதுர அணி A-ன் சேர்ப்பு அணி $J = (A_{ji})$ ஆகும்.

A என்ற சதுர அணிக்குச் சரியாக B என்னும் சதுர அணியை $AB = I$ என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு இணங்கக் காண

முடிந்தால் B-யை A-ன் தன்மாற்று (inverse) அணி என்று கூறு கிறோம். A-ன் தன்மாற்று அணியை A^{-1} என்று குறிப்பது வழக்கம். ஒருமையற்ற எந்தச் சதுர அணி A-ம் ஒரேவொரு தன்மாற்று அணி A^{-1}-ஐத்தான் பெற்றிருக்கும் என்றும்,

$$A^{-1}A=A\ A^{-1}=I$$

என்றும் நிரூபிக்கலாம். மேலும் J என்பது ஒருமையற்ற அணி A-ன் சேர்ப்பு அணி என்றால்

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}J$$

என நிரூபிக்கலாம்.

ஒருமையற்ற சதுர அணிகளுக்கு மட்டுமே தன்மாற்று அணி வரையறுக்கப்பட்டிருப்பதைக் கவனிக்கவும். A, B-க்கள் சமபரி மாணமுள்ள ஒருமையற்ற சதுர அணிகள் என்றால்

$$(A\ \ B)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \text{ என்றும் } (A')^{-1}=(A^{-1})'$$

என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ என்ற அணியின்}$$

$$\text{தன்மாற்று அணி } \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

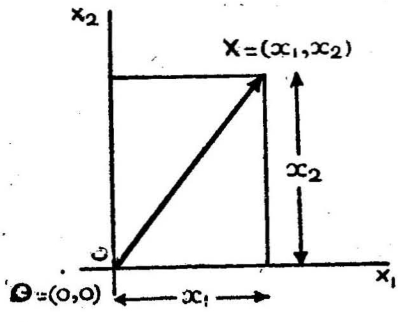
1-2. வெக்டர்களும் வெக்டர் வெளிகளும்

நமக்கு நன்கு அறிமுகமான இருபரிமாண யூக்ளிட் தளத்தில் O என்ற புள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டு இரண்டு ஆயங்களைப் பொருத்து ஒரு புள்ளியை வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மெய் எண்கள் சோடி (x_1, x_2)-ஆல் குறிக்கிறோம். 1×2 பரிமாணமுள்ள அணி (x_1, x_2)-ஐ X என்று குறித்தால் X போன்ற அணிகள் அமைக் கும் கணமும் யூக்ளிட் இருபரிமாண தளத்தின் புள்ளிகள் கண மும் ஒன்றுக்கு-ஒன்று இசைவு (One-one correspondence) பெற்றுள்ளன என்பது தெளிவு. X-ஐ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ என்ற நிரல் வெக்டராகவும் எழுதலாம். (படம் 1.1 ஐப் பார்க்கவும்).

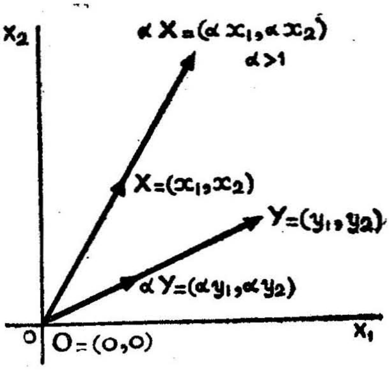
பொதுவாக, வெக்டர்கள் அளவையும், திசையையும் பெற்ற கணித மூலகங்கள் ஆகும். இந்த நோக்கில் (x_1, x_2) என்பது ஆதியை ஆய திசைகளில் முறையே x_1, x_2 அலகு தூரம் இடமாற்றம் செய்யக் கிடைக்கும் புள்ளியாகும். இந்தப் புள்ளியை X என்றே குறிப்பிடுகிறோம். இத்தச் குறியீட்டில் தளத்தின் புள்ளிகளை (நிலை) வெக்டர்கள் என்கிறோம். வெக்டர்களும் தடித்த சாய்வு எழுத்துக்களாலேயே குறிக்கப்படுகின்றன. ஆதியைக் குறிக்கும் வெக்டர் $O = (0, 0)$ என்ற அணியாகும்.

இருபரிமாண யூக்ளிட் தளத்தை E^2 எனக் குறிக்கின்றோம். இந்த வெளி (Space)யின் சில முக்கியப் பண்புகளைக் காண்போம். அளவு மட்டும் பெற்று திசையில்லாத கணியங்களை திசையிலிகள் (Scalars) என்கிறோம்.

யூக்ளிட் தளம் E^2-ல் X என்ற வெக்டர் அமைந்தால் அதை $X \in E^2$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.



படம் (1.1)



படம் (1.2)

(அ) திசையிலியால் வெக்டரைப் பெருக்குதல்: (படம் (1.2)

α, X என்பன முறையே ஏதாவதொரு திசையிலி, வெக்டர் என்க. இந்தச் சோடியுடன் αX என்ற வெக்டரைத் தொடர்பு படுத்தி $\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ என எழுதுகிறோம். இந்தப் பெருக்கல் பின் வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்கிறது:

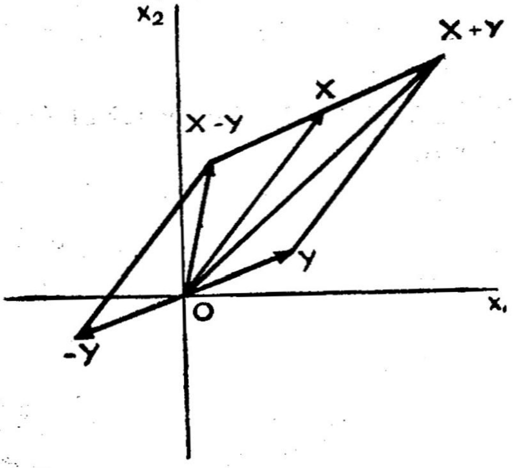
(i) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta) X = \beta(\alpha X)$

(ii) $1 X = X$

(iii) $0 X = 0$

(ஆ) வெக்டர்கள் கூட்டல்: (படம் (1.3)

$X = (x_1, x_2)$; $Y = (y_1, y_2)$ என்ற வெக்டர்களோடு $(x_1 + y_1, \ x_2 + y_2)$ என்ற வெக்டரைத் தொடர்பு படுத்தி இக் கடைசி வெக்டரை முதலிரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதல் என்கிறோம். இக் கூடுதலை $X + Y$ என எழுதுகிறோம். இங்கு வரும் கூட்டல் குறி சாதாரண எண்களின் கூட்டல் குறியிலிருந்து மாறுபட்டது. இருப்பினும் குழப்பத்திற்கான வாய்ப்பு இல்லை என்பதால் அதே குறியீட்டைப் பயன் படுத்துகிறோம். இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல் பின் வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது:



படம் (1.3)

(i) $X + Y = Y + X$ (இடமாற்றுப் பண்பு)

(ii) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ (சேர்க்கைப்பண்பு)

(iii) $X + 0 = 0 + X = X$

(iv) ஒவ்வொரு $X \in E^2$-க்கும் சரியாக ஒரேவொரு வெக்டர் $Y \in E^2$, $X + Y = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்வதாக உள்ளது. இதை $-X$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். $X = (x_1, x_2)$ என்றால் $(-x_1, -x_2)$ என்பது $-X$ ஆகும். (ஏன் ?)

(இ) இரு வெக்டர்களின் உட்பெருக்கல் (Inner Product Two Vectors).

E^2-ல் உள்ள இரு வெக்டர்கள் X, Y என்பனவற்றுடன் $[X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ $x_1 y_1 + x_2 y_2$ என்ற மெய்யெண்ணைத்

தொடர்புபடுத்தி அதை அவ்வெக்டர்களின் உட்பெருக்கல் என வரையறுக்கின்றோம். இப் பெருக்கலை $X \cdot Y$ அல்லது XY என்று எழுதுகிறோம். வரையறைலிருந்து $X \cdot Y = Y \cdot X$ என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் $X \cdot X \geqslant 0$ என்பது எப்பொழுதும் உண்மையாகும். $X=0$ என்றால் மட்டுமே $X \cdot X=0$ என்றாகும். $X \cdot Y=0$ என்று உள்ள இரு வெக்டர்களை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை (Orthogonal) என்கிறோம். $X \cdot X$ என்பதை X^2 என்றும் எழுதுவதுண்டு.

திசையிலிப் பெருக்கல், வெக்டர்கள் கூட்டல், உட்பெருக்கல் ஆகியவை பின்வருமாறு தொடர்பு பெற்றுள்ளன :

$$\alpha (X+Y) = \alpha X + \alpha Y$$
$$(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X$$
$$(\alpha X + \beta Y) \cdot Z = \alpha (X \cdot Z) + \beta (Y \cdot Z)$$

இங்கு α, β திசையிலிகள்; X, Y, Z வெக்டர்கள்.

(ஈ) வெக்டரின் நீளம் அல்லது நார்ம் (Norm).

E^2-ல் உள்ள ஒவ்வொரு வெக்டர் $X=(x_1, x_2)$-உடனும் $+\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ என்ற மிகைமெய் எண்ணைத் தொடர்பு படுத்துகிறோம். இதை X-ன் நீளம் அல்லது நார்ம் என்று வழங்குகிறோம். மேலும் இதை $\| X \|$ என்று எழுதுகிறோம். நார்ம்கள் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன:-

(i) $\| X \| \geqslant 0$;
$X = 0$ என்னும் போது மட்டும் $\| X \| = 0$ ஆகும்.

(ii) $\| \alpha X \| = | \alpha | \, \| X \|$ (α மெய் எண்).

(iii) $\| X + Y \| \leqslant \| X \| + \| Y \|$

இதை முக்கோணச் சமனின்மை (Triangle Inequality) என்பர்.

(iv) $\| X \| = +\sqrt{X \cdot X}$

(உ) இரு வெக்டர்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் :

$X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$ என்ற எந்த இரு வெக்டர்களை E^2ல் எடுத்துக் கொண்டாலும் அவற்றுடன் $+\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ என்ற மெய் எண்ணைத் தொடர்பு படுத்துகிறோம். இதை அவற்றிற்

கிடையேயுள்ள தூரம் என்கிறோம். மேலும் இதை $d(X, Y)$ என்று எழுதுகிறோம். பிரிவு (ஈ)-யிலிருந்து

$$d(X, Y) = \| X - Y \| = +\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

என்பது தெளிவாகிறது.

(ஊ) ஒரு படிச் சாரா வெக்டர்கள்; ஒரு படிச் சார்ந்த வெக்டர்கள். (Linearly Independent and Dependent Vectors) :

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ என்பன மெய் எண்கள்; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன E^2-ல் உள்ள வெக்டர்கள்.

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$$

என்பதைக் கொடுத்துள்ள வெக்டர்களின் ஒரு நேரியச் சேர்க்கை (Linear Combination) என்கிறோம். இது ஒவ்வொரு α_i-ம் 0 என்னும் போதுமட்டும் 0-க்குச் சமமானால் $X_1, X_2, \ldots X_n$-களை ஒரு படிச்சாரா வெக்டர்கள் என்கிறோம். ஒரு α_i-ஆவது பூச்சியமாக இல்லாதிருந்து, மேற்கண்ட n வெக்டர்களின் நேரியச் சேர்க்கை பூச்சியம் வெக்டருக்குச் சமமானால் அவ்வெக்டர்களை ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டர்கள் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $X_1 = (2, 3)$; $X_2 = (5, 2)$ என்ற வெக்டர்கள்ஒருபடிச்சாராதவை. ஏனென்றால்

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$$

என்பது $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ என்பதைப் புலப்படுத்துகிறது. மாறாக, $X_1 = (1, 0)$; $X_2 = (0, 1)$; $X_3 = (5, 2)$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு படிச்சார்ந்தவை. ஏனென்றால்

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0 \text{ என்பது}$$

$\alpha_1 + 5\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$ என்பதைப் புலப்படுத்துகிறது. ஆனால் இக்கூற்றுகள் பூச்சியமல்லாத எந்த α_3-க்கும், $\alpha_1 = -5\alpha_3 \neq 0$; $\alpha_2 = -2\alpha_3 \neq 0$ என்னும் போது பொருந்தும். E^2-ல் எந்த மூன்று வெக்டர்களும் ஒருபடிச் சார்ந்தவையாகும். இந்தப் பண்பே E^2-ஐ இரு பரிமாண வெளியாக்குகிறது. இந்த வெளியில் (1, 0), (0, 1) என்ற இரு வெக்டர்களையும் ஓரலகு வெக்டர்கள் (Unit Vectors) என்கிறோம். இவற்றை முறையே U_1, U_2 என்று குறிக்கிறோம். இந்த வெளியின் வேறு எந்த வெக்டரையும் U_1, U_2-க்களின்ஒரு நேரியச் சோக்கையாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $X = (x_1, x_2)$ என்றால்

$$X = x_1 U_1 + x_2 U_2 \quad \text{ஆகும்.}$$

(எ) n-பரிமாண யூக்ளிட் வெளி-E^n(n-dimensional Euclidean Space)

யூக்ளிட் இருபரிமாணவெளி E^2-ன் பண்புகளைப் பொதுமைப் படுத்துவதால் கிடைப்பது யூக்ளிட் n-பரிமாண வெளி E^nஆகும். வரிசைப்படுத்திய n மெய் எண்களை (Ordered Set of n- Real Numbers) n-பரிமாண வெக்டர் என்கிறோம். (அ) முதல் (ஊ) வரை E^2-க்குக் கூறப்பட்ட பண்புகள் யாவும் தகுந்த மாற்றங்களுடன் E^n-க்கும் பொருந்தும். குறிப்பாக

$X = (x_1, x_2, .. , x_n)$, $Y = (y_1, y_2, ... y_n)$, α ஏதாவதொரு மெய் எண் என்றால்

$$\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$
$$X + Y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$
$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

E^n-ல் ஒரு படிச்சாரா வெக்டர்களாக n-வெக்டர்களைப் பொருக்கி யெடுக்கலாம். எந்த $(n+1)$ வெக்டர்களும் ஒருபடிச் சார்ந்தவை யாகவே அமையும். தம்முள் ஒருபடிச் சாரா n வெக்டர்களைக் கொண்ட கணத்தை E^n-ன் ஓர் அடிப்படை (Basis) என்கிறோம். E^n-ன் எந்த வெக்டரையும் அடிப்படையிலுள்ள வெக்டர்களின் நேரியச் சேர்க்கையாக ஒரேவொரு முறையில் தான் எழுத முடியும். E^n-ன் ஒரலகு வெக்டர்கள் முறையே $U_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $U_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, .. $U_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$, ... , $u_n = (0, 0, \ldots 1)$ ஆகும். இந்த n வெக்டர்களும் E^n-ன் ஓர் அடிப் படையைக் கொடுக்கின்றன. இவ்வெளியின் எந்த வெக்டரையும் $U_1, U_2, \ldots, U_n$-களின் நேரியச் சேர்க்கையாக எழுதலாம். அதாவது, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்றால்

$X = x_1 U_1 + x_2 U_2 + . + x_n U_n$ என்று எழுதலாம்.

(ஏ) அரை வெளிகளும், அதிபர தளங்களும் : (Half Spaces and Hyper-planes)

E^2 வெளியில் $X = (x_1, x_2)$ என்ற வெக்டர் கொடுக்கப்பட்டால் a_1, a_2, b என்ற மெய் எண்களுக்கு

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

என்ற கட்டுப்பாடு ஒரு நேர் கோட்டிலுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளை யும், எனவே, அந்த நேர் கோட்டினையே, குறிக்கின்றது. அதே போன்று E^3-ல் $X = (x_1, x_2, x_3)$ என்ற வெக்டர் தரப்படின் a_1, a_2, a_3, b என்ற மெய் எண்களுக்கு

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$$

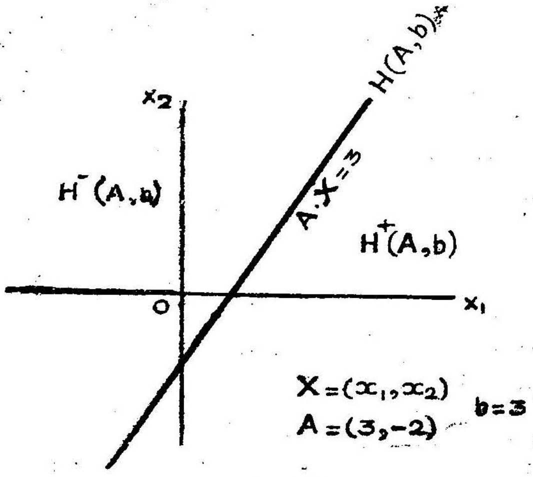
என்னும் கட்டுப்பாடு ஒருதளத்திலுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும், எனவே அத்தளத்தினையே, குறிக்கின்றது. மேலும் $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ என்னும் கோடு E^2-ஐ இரு அரை தளங்களாகப் பிரிக்கிறது; அதே போன்று $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ என்னும் தளம் E^3-ஐ இரு அரை வெளிகளாகப் பிரிக்கிறது. இவற்றை முன்மாதிரியாகக் கொண்டு நேரியக்கட்டுப்பாடொன்றினால் E^n-ல் கிடைக்கும் பொருளை அதிபர தளம் என்றும் அது E^n-ஐப் பிரிக்கும் இரு பகுதிகளையும் அரை வெளிகள் என்றும் கூறுகிறோம். எனவே $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ என்றால் $a_1, a_2, \dots a_n, b$ என்ற மெய் எண்களுக்கு

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

என்ற கட்டுப்பாடு அதிபரதளத்திலுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளையும் எனவே அந்த அதிபரதளத்தையே, குறிக்கின்றது. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ என்ற வரிசைப் படுத்திய n மெய் எண்களையும் E^n-ன் ஒரு மூலகமாகப் பாவித்து அதை A எனக் குறித்தால் அதிபரதளத்தின் சமன்பாட்டை $A \cdot X = b$ என்று எழுதலாம். இந்த அதிபர தளத்தை $H(A, b)$ என்று குறிப்பிடலாம். ஆகையால்

$$H(A, b) = \{ X : X \in E^n \& A \cdot X = b \}$$

இங்கு $A \neq 0$ என்றும் b மெய் எண் என்றும் கொள்வோம். இத்தளம் E^n-ஐ



படம் (1,4)

$$H^+(A, b) = \{ X : X \in E^n \& A \cdot X > b \}$$
$$H^-(A, b) = \{ X : X \in E^n \& A \cdot X < b \}$$

என்ற அரை வெளிகளாகப் பிரிக்கின்றது.

படம் (1.4)-ல் E^2வெளியில் $A=(3, -2), b=3$ என்று கொண்டு $A . X = b$ என்ற அதிபரதளமும் (நேர்கோடு) $H^+ (A, b)$, $H^-(A,b)$ என்ற அரை வெளிகளும் (தளங்களாக) காட்டப்பட்டு உள்ளன. இரு அரை வெளிகளுக்கும் பொதுவான வெக்டர்கள் பிரிக்கும் அதிபரதளத்தில் அமைகின்றன.

1-3 குவிகணங்கள் (Convex sets)

$X_1, X_2, ... X_n$ என்னும் E^n-ன் வெக்டர்களையும் $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ என்ற திசையிலிகளையும் (மெய் எண்கள்) பின்வரும் கட்டுப் பாடுகளுக்கு இணங்க எடுத்துக் கொள்வோம்:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$$
$$\alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$$

$X \in E^n$-ஐ $X_1, X_2, ..., X_n$-களின் குவிச் சேர்க்கை (Convex Combination) என்கிறோம். E^n-ன் உட்கணம் (Subset) C அதிலுள்ள எந்த வெக்டர்கள் X_1, X_2-க்களுக்கும் அவற்றின் எல்லா குவிச் சேர்க்கைகளையும் தன்னுள் பெற்றிருந்தால் அதைக் குவி (உள்) கணம் (Convex subset) என்று கூறுகிறோம். அதாவது $X_1, X_2 \in C$ கொடுக்கப்பட்டால் $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ என்றுள்ள அனைத்து $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ என்ற மெய் எண் களுக்கும் $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$-ம் C-ன் மூலகம் ஆகும்.

E^2-ல் வட்டங்கள் குவி கணங்களை அமைக்கும். E^3-ல் கன சதுரம் குவி கணமாகும். முழுவெளி E^n-ம் ஒரு குவி கணமே. வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள புள்ளிகளின் கணம் குவி கணம் அல்ல. முக்கோணம், குவிப் பல கோணம் முதலியன குவிகணங்கள் ஆகும்.

ஒரு குவி கணத்தைச் சேர்ந்த எத்துணை வெக்டர்களின் குவிச் சேர்க்கையை எடுத்துக் கொண்டாலும் அது அக் கணத்திலேயே இருக்கும் என நிரூபிக்கலாம். X_1, X_2 என்னும் இரு வெக்டர்களின் குவிச் சேர்க்கையால் பெறப்படும் குவிகணம் C என்க. $X_3 \in C$ என்றும் $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$ என்பது X_1, X_2, X_3-க்களின் ஒரு குவிச் சேர்க்கை என்றும் கொள் வோம். (எனவே, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2, + \alpha_3 = 1$). X-ம் C-ன் மூலகமே என நிரூபித்தல் வேண்டும்.

$$\alpha_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2'}, \quad \alpha_2' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$$

என்றால் $\alpha_1', \alpha_2' > 0, \quad \alpha_1' + \alpha_2' = 1$ என்பது தெளிவு. மேலும், $\alpha_1' X_1 + \alpha_2' X_2 = X_4 \in C$. ஆகையால்

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (\alpha_1' X_1 + \alpha_2' X_2) + \alpha_3 X_3$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2) X_4 + \alpha_3 X_3$$

இதிலிருந்து X-ம் C-ன் மூலகங்களான X_3, X_4 களின் குவிச் சேர்க்கையே என்பது புலனாகிறது. எனவே குவி கணத்தின் வரையறைப்படி $X \in C$. இவ்வண்ணமே C-ன் எத்துணை வெக்டர் களின் குவிச் சேர்க்கையும் அந்தக் கணத்திலேயே அமைகிறது என நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் : (1.1): E^n-ன் இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டில் (Line Segment) உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் கொடுத்துள்ள புள்ளிகளின் குவிச் சேர்க்கையாக எழுதலாம்.

நிறுவல்: X_1, X_2-க்களைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டில் X அமைகிறது என்க. இந்தக் கோடு $X_1 - X_2$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவிருக்கும் [படம் (1.5)-ஐப் பார்க்கவும்]. வெக்டர் கூட்டல் விதிப்படி

$$X_2 + \lambda (X_1 - X_2) = X$$

அல்லது

$$(1-\lambda) X_2 + \lambda X_1 = X$$

எனவே X_1, X_2-க்களின் குவிச் சேர்க்கையாக X எழுதப்பட்டது.

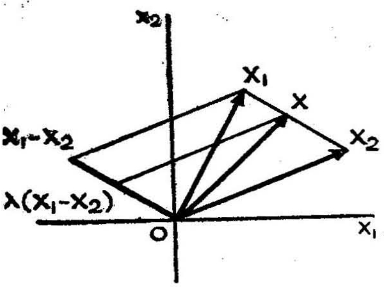
தேற்றம் (1.2): [தேற்றம் (1.1) - ன் மறுதலை]: E^n-ல் உள்ள இரு புள்ளிகளின் குவிச் சேர்க்கையாக எழுதப்படக் கூடிய எந்தப் புள்ளியும் அவ்விரு புள்ளிகளையும் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டில் அமையும்.

நிறுவல்: $X = (1-\lambda) X_2 + \lambda X_1$

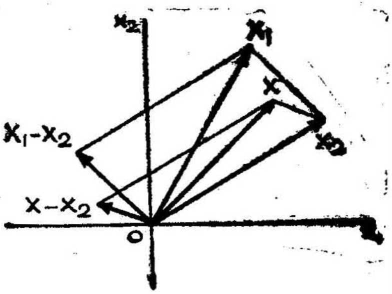
அதாவது, $X - X_2 = \lambda (X_1 - X_2)$, $0 < \lambda < 1$, என்க. எனவே $X - X_2$ என்ற வெக்டர் $X_1 - X_2$ என்ற வெக்டரின் ஏதோவொரு மிகை மடங்காகும். ஆகவே இவை இரண்டின் திசைகளும் ஒன்றாகும்.

எனவே படம் (1.6)-ல் காட்டியது போல் X இருக்க முடியாது. அதாவது, X_1, X_2-க்களைச் சேர்க்கும் கோடும் X, X_2-க்களைச்

சேர்க்கும் கோடும் முறையே $X_1 - X_2$, $X - X_2$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணை என்பதால் வெக்டர் X-ம் X_1, X_2-க்களைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மேல் அமையும்.



படம் (1.5)

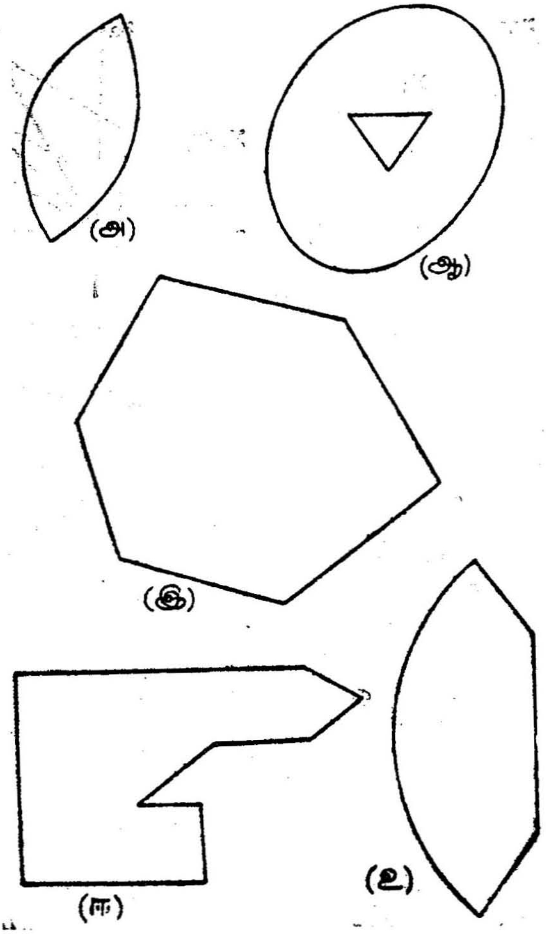


படம் (1.6)

இத் தேற்றங்களிலிருந்து ஒரு குவிகணம் அக் கணத்தில் உள்ள எந்தவிரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டையும் பெற்றிருக்கும் என அறியலாம். படம் (1.7)-ல் சில குவிகணங்கள் எஞ்சியவை குவிகணங்கள் அல்ல. அவற்றைக் கண்டறியுங்கள்! குவிகணம் C-ன் புள்ளி X-ஐ அக் கணத்திலுள்ள வேறு இரு புள்ளிகளின் குவிச் சேர்க்கையாக எழுத முடியாது எனின் அதை C-ன் கோடிப்புள்ளி (Extreme Point) என்கிறோம். E^2-ல் பரிதியுள்ளிட்ட ஒரு வட்டத்தின் புள்ளிகள் குவிகண மொன்றையமைக்கும். பரிதியின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் இக் குவி கணத்தின் கோடிப் புள்ளியாகும். பரிதியை நீக்கிய வட்டத்தின் புள்ளிகளும் ஒரு குவிகணத்தை அமைக்கும். இக் கணத்திற்குக் கோடிப் புள்ளிகளே கிடையாது. ஒரு முக்கோணத்தின் கோடிப் புள்ளிகள் அதன் முனைகளாகும்.

S என்பது ஒரு கணம். இக் கணத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் எல்லா விதமான குவிச் சேர்க்கைகளையும் கொண்ட கணத்தை S-ன் குவியுறை (Convex Hull) என்கிறோம். S-ஐ உட்கணமாகப் பெற்ற மீச்சிறு குவிகணம் அதன் குவியுறையாகும். S-ன் குவியுறையை $C\ (S)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். S என்பது E^3-ல் ஒரு கன சதுரத்தின் 8 முனைகளே என்றால் $C\ (S)$ அம்முனைகள் அமைக்கும் முழு கன சதுரத்தையும் குறிக்கும். S என்பது E^2-ல் ஒரு வட்டத்தின் பரிதி என்றால் $C\ (S)$ அவ்வட்டத்தின் முழுப்பரப்பையும் குறிக்கும் கணமாகும்.

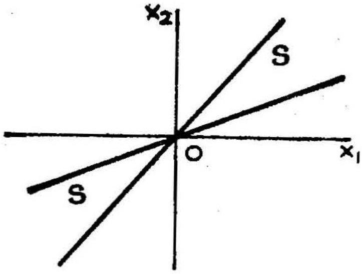
கணம் S ஒரு சில புள்ளிகளையே பெற்றிருக்குமானல் அதன் குவியுறை C (S)-ஐக் குவிப்பன்முகி (Convex Polyhedron) என்கிறோம். E^2-ல் இதையே குவிப் பல கோணம் என்கிறோம். ஒரு சில கோடிப் புள்ளிகளையே கொண்ட மூடிய (Closed) வரம்



படம் (1,7)

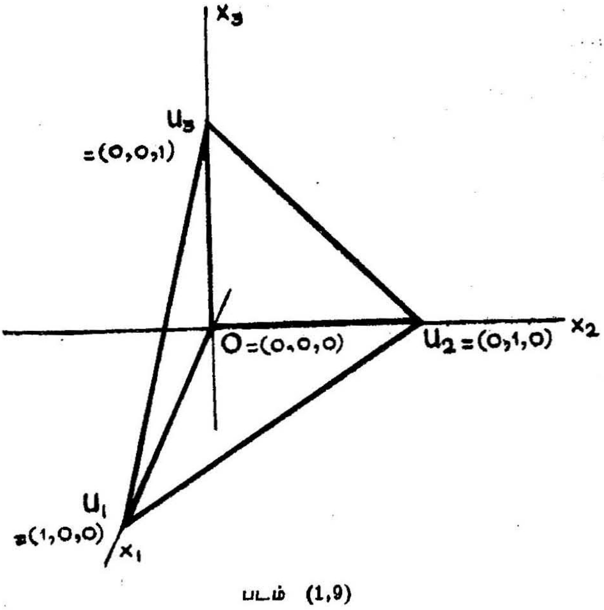
புடைய (Bounded) கணமாக C இருந்தால் (அதாவது, அது ஒரு குவிப்பன்முகி என்ருல்) அந்தக் கணத்தில் உள்ள எந்தப் புள்ளியையும் கோடிப் புள்ளிகளின் குவிச் சேர்க்கையாக எழுதலாம். எனவே C அதன் கோடிப் புள்ளிகளின் குவியுறையாகவும் அமையும்.

அனைத்து $\lambda > 0$க்கும், அனைத்து $X \in S$-க்கும் $\lambda X \in S$ என்ற கூற்று உண்மையின் S-ஐ கூம்பு (Cone) என்கிறோம். படம் (1,8)-ல் காட்டப்பட்டுள்ள கணம் S ஒரு கூம்பு ஆகும். முழுவெளி E^n-ம் 0-ஐ மாத்திரம் கொண்ட $\{0\}$ என்னும் கணமும் கூம்புகளாகும். λ பூச்சியம் மதிப்பை ஏற்கும் என்பதால் எல்லாக் கூம்புகளிலும் 0 ஒரு மூலகமாகும்.



படம் (1,8)

ஒரு கூம்பு குவிகணமாகவும் இருந்தால் அதைக் குவிக் கூம்பு (Convex Cone) என்கிறோம். படம் (1,8)-ல் முதற் கால் பகுதியில் அமைந்த கூம்பு ஒரு குவிக் கூம்பாகும், ஆனுல் அதில் காட்டப்பட்ட கணம் S குவிக்கூம்பு அல்ல. (ஏன்?)



படம் (1,9)

சரியாக $(n+1)$ முனைகளைக் கொண்ட n பரிமாண குவிப் பன்முகியை சிம்ப்ளக்ஸ் (Simplex) என்கிறோம். சிம்ப்ளக்ஸின்

வரம்புகள் n-ஐ விடக் குறைவான பரிமாணமுள்ள சிம்ப்ளக்ஸ்கள் ஆகும். இவற்றைச் சிம்ப்ளக்ஸ் முகங்கள் (Simplicial Faces) என்கிறோம். i-பரிமாணமுள்ள n-பரிமாண சிம்ப்ளக்ஸின் சிம்ப்ளக்ஸ் முகங்களின் எண்ணிக்கை $^{n+1}C_{i+1}$. ஆகும். புள்ளி 0-பரிமாண சிம்ப்ளக்ஸ் ஆகும்; கோடு முதல் பரிமாண சிம்ப்ளக்ஸ்; இரு பரிமாணத்தில் முக்கோணம் சிம்ப்ளக்ஸ் ஆகும். முப்பரிமாண சிம்ப்ளக்ஸ் நான்முகி (Tetrahedron ஆகும். ஓரலகு ஆய வெட்டுத் துண்டுகளைப் (Unit Intercept on the axis) பெற்ற சிம்ப்ளக்ஸின் சமன்பாடு $x_i \geqslant 0$,

$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1$ ஆகும். இது $n = 3$ என்னும் போது முப்பரிமாண வெளியில் (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) என்ற புள்ளிகளை முனைகளாகவுடைய நான்முகியாகும். (படம் 1.9).

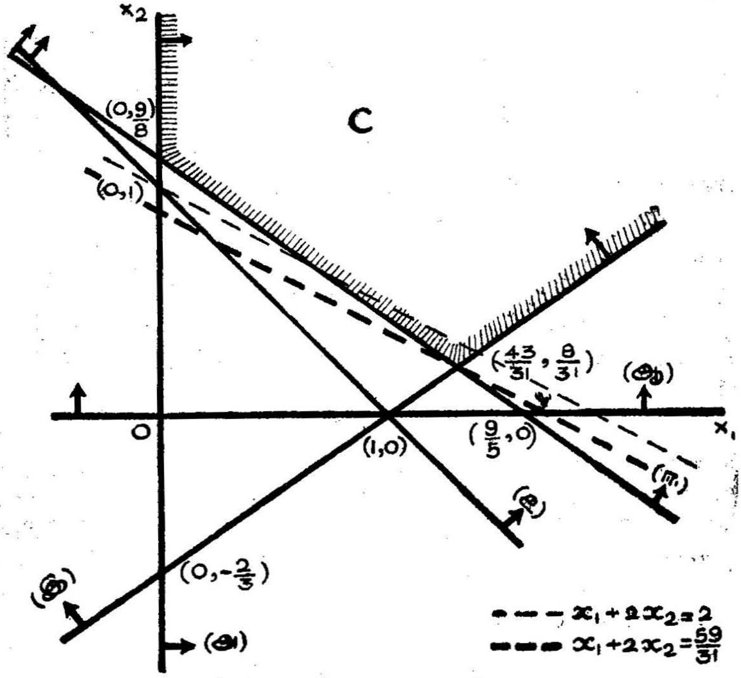
1-4 நேரியச் சமனின்மைகள் (Linear Inequalities)

பின் வரும் நேரியச் (அல்லது) ஒருபடிச்) சமனின்மைகளைக் கவனிக்கவும் :

$$\left.\begin{array}{lllll} (\text{அ}) & x_1 & & \geqslant 0 \\ (\text{ஆ}) & x_2 & & \geqslant 0 \\ (\text{இ}) & 2x_1 & - \ 3\,x_2 & \leqslant 2 \\ (\text{ஈ}) & 5x_1 & + \ 8\,x_2 & \geqslant 9 \\ (\text{உ}) & x_1 & + \ x_2 & \geqslant 1 \end{array}\right\} \qquad (1\,.\,1)$$

இந்தச் சமனின்மைகளை நிறைவு செய்யும் இருபரிமாண யூக்ளிட் வெளியிலுள்ள புள்ளிகள் (x_1, x_2) தளத்தின் எப்பகுதியில் இருக்கும் என்பதை ஆராய்வோம். (அ), (ஆ) என்னும் இரு சமனின்மைகளும் இப்புள்ளிகள் தளத்தின் மிகைக் காற்பகுதியில் (Positive or First Quadrant) தான் இருக்கும் என உடனடியாகப் புலப்படுத்துகின்றன. எனவே தீர்வு கணத்தைக்காண குறையல்லா x_1, x_2 மதிப்புகளைப் பெற்ற (x_1, x_2) என்ற புள்ளிகளை ஆராய்வது போதுமானது. இப் புள்ளிகள் x_1 ஆயத்திலோ அல்லது அதன் மேற்புறமோ அல்லது x_2 ஆயத்திலோ அல்லது அதன் வலப்புறமோ தான் இருக்கும். [படம் (1,10)- ஐப் பார்க்கவும்]. சமனின்மைகள் ஒவ்வொன்றும் ஓர் அரை தளத்தைக் குறிக்கின்றன. அவை குறிக்கும் அரை தளங்கள் அம்புக் குறிகளால் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இனி சமனின்மை (இ)-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $2x_1 - 3x_2 = 2$ என்ற கோட்டை வரைக. ஆதிப் புள்ளி (0,0) சமனின்மை (இ)-ஐ நிறைவு செய்வதால் அது சமனின்மையின்

தீர்வுகளில் ஒன்ருகும். எனவே, $2x_1 - 3x_2 = 2$ என்ற கோட்டிற்கு ஆதி எப்புறத்தில் உள்ளதோ அப்புறத்து அரை தளத்துப் புள்ளிகள் யாவுமே சமனின்மையின் தீர்வுகளாகும். இந்த அரை தளமும் படத்தில் அம்புக்குறியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் (1.10)

எனவே சமனின்மைகள் (அ), (ஆ), (இ) ஆகிய மூன்றையும் நிறைவு செய்யும் புள்ளிகள் தளத்தின் முதற்கால் பகுதியில் $2x_1 - 3x_2 = 2$ என்ற கோட்டிற்கு மேல் உள்ளவையாகும். இதே போன்று படிப்படியாக அடுத்து வரும் சமனின்மைகள் குறிக்கும் அரை தளங்களைக் கண்டு, எல்லாச் சமனின்மைகளையும் குறிக்கும் அரைதளங்களின் இடைவெட்டைக் கண்டால் அதுவே இவற்றை நிறைவுச் செய்யும் புள்ளிகளின் கணமாகும். படத்திலிருந்து இந்தக் கணம் வரம்பற்றது என்பது தெரிகிறது. மேலும், இக்கணத்தைக் காண்பதில் (ஆ), (உ) என்ற சமனின்மைகள் இல்லாமலே கூட இருந்திருக்கலாம். உண்மையில் மற்ற மூன்று சமனின்மைகளிலிருந்து இவ்விரண்டு சமனின்மைகளும் பெறப்

படுகின்றன. ஆனால் இந்தப் பண்பு சமனின்மைகளிலிருந்து வெளிப்படையாகப் புலனாகவில்லை.

வரிவடிவ பூர்வமாக மேலே கண்ட உண்மைகளை அணிகளைப் பயன்படுத்திப் பின் வருமாறு ஆராயலாம்:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \; ; \; P_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

என எழுதினால் (அ), (ஆ), (இ), (ஈ), (உ) என்ற சமனின்மைகளை

$$A\,X \geqslant P_0 \qquad (1.2)$$

எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடலாம். இங்கு சமனின்மை (இ) இருபுறமும் -1 ஆல் பெருக்கப்பட்டு $\geqslant$ அமைப்பில் மாற்றப்பட்டிருக்கிறது என்பதைக் கவனிக்கவும். A-ன் நிரல்களை முறையே P_1, P_2 என்ற 5×1 அணிகளாக எழுதினால் சமனின்மை (1.2)-ஐ

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 \geqslant P_0 \qquad (1.3)$$

எனவும் எழுதலாம். இந்த அமைப்பில் நிரல் வெக்டர்கள் P_1, P_2, P_0 5-பரிமாண வெளியின் புள்ளிகளாகும். x_1, x_2- க்களை கட்டுப்பாடு (1·3)- க்கு இணங்கக் காண்பதே நமது பிரச்சினையாகும்.

பொதுவாக,

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \geqslant b_1$$

என்ற நேரியச் சமனின்மையை (Linear Inequality) நிறைவு செய்யும் புள்ளிகள் n- பரிமாண அரை வெளியொன்றைத் தீர்மானிக்கின்றன. பின் வரும் சமனின்மைகள் (1.4)-ன் ஒருங்கமைத் தீர்வுகள் (Simultaneous Solutions) n-பரிமாண வெளியில் ஒரு குவிகணத்தை அமைக்கும். [இது அடுத்து வரும் பாடத்தின் முதல் தேற்றமாகும். தேற்றம் (2·1)].

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n & \geqslant b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n & \geqslant b_2 \\ \ldots \qquad \ldots & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n & \geqslant b_m \end{array}\right\} \quad (1.4)$$

சமனின்மைக் குறியின் திசையை மாற்ற இருபுறங்களையும் -1-ஆல் பெருக்கி எழுதக்கூடுமாதலால் (1·4)- சமனின்மைகளின் பொது

உருவாக எடுத்துக் கொள்ளப்படும். மேலும், சமனின்மைகள் (1·4) –ஐ சமன்பாடுகளாக மாற்ற அவை ஒவ்வொன்றின் இடது புறக்கோவையினின்றும் ஒரு குறையல்லா எண்ணைக் கழிக்க வேண்டும். இவ்வண்ணம் கழிக்கப்படும் குறையல்லா எண்கள் தொய்வு மாறிகள் (Slack Variables) எனப்படும். x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{n+m} என்ற m தொய்வு மாறிகளை உட்புகுத்திச் சமனின்மைகள் (1·4)-ஐ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - x_{n+2} &= b_2 \\ \dots \qquad \dots \qquad & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} &= b_m \end{aligned}$$

என்னும் சமன்பாடுகளாக மாற்றியமைக்கின்றோம். இங்கு $x_{n+i} \geqslant 0\ (i=1, 2, \dots, m)$. எந்த மெய் எண்ணையும் இரு குறையல்லா மெய் எண்களின் வேறுபாடாக (difference) எழுத முடியும் என்பதால்,

$$x_j = x_j' - x_j'', \quad x_j' \geqslant 0, x_j'' \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \dots n$$

என எழுதி சமனின்மைகள் (1.4)—ஐ குறையல்லா மாறிகள் x_j', x_j'' $(i = 1,2,\dots n)$, $x_{n+i} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \dots m)$ என்பவற்றில் m சமன்பாடுகளாக மாற்றி அமைக்க முடியும் என்பது தெளிவாகிறது.

தவிரவும், $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n > b_i$ என்று ஏதாவது ஒரு சமனின்மை இருக்குமானால் இடது புறத்துடன் x_{n+i} என்ற குறையல்லாத் தொய்வு மாறியைக் கூட்டி அதைச் சமன்பாடாக மாற்றலாம் என்பதையும் கவனிக்கவும்.

சில சமனின்மைகளின் ஒருங்கமைத் தீர்வுக் கணம் வெற்றுக் கணமாகவும் (Empty Set) இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $x_1 + 3x_2 \geqslant 7$; $2x_1 + 6x_2 \leqslant 3$ என்ற சமனின்மைகளை ஒருங்கே நிறைவு செய்யும் புள்ளிகள் ஏதும் இருக்க முடியாது. அதாவது இவ்விரு சமனின்மைகளின் ஒருங்கமைத் தீர்வுகள் வெற்றுக் கணத்தை அமைக்கும்.

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையைக் கணிதப் பிரச்சினையாக (Mathematical Problem) மாற்ற முயலும் போது சில சமனின்மைகளை நிறைவு செய்வதும், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு நேரியக் கோவையின் (Linear Expression) மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு (Minimum or Maximum) மதிப்பைக் கொடுப்பதுமான ஒருங்கமைத் தீர்வுகளைக் காண வேண்டியிருக்கிறது. சமனின்மைகள்

(1.1)-ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். x_1+2x_2 என்ற கோவையை—இதைக் குறிக்கோள் சார்பு (Objective Function) என்போம்—மீச்சிறுமப் படுத்துவதும் சமனின்மைகள் (1.1)-ஐ நிறைவு செய்வதுமான x_1, x_2-க்களின் மதிப்பு அல்லது மதிப்புகளைக் காண்பது தேவையாகிறது என்க. $x_1+2x_2=b$ என்ற கோட்டை b-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு வரைவோம். சில கோடுகள் சமனின்மைகளின் தீர்வுக்கணம் C-ஐ [படம் (1.10)-ஐப் பார்க்கவும்] வெட்டும்; சில C-ஐச்சந்திக்காது. இக் கோடுகளுள் $b=\frac{59}{31}$ என்னும் போது வரையப்பட்ட $x_1+2x_2=59/31$ என்ற கோடு தீர்வுக்கணப் பல கோணத்தின் ஒரு முனை $\left(\frac{43}{31}, \frac{8}{31}\right)$ வழியாகச் செல்கிறது.[1] இப் புள்ளியைத் தவிர கோட்டின் வேறெந்தப் புள்ளியும் C-ல் இராது. மேலும் C-ஐச் சந்திக்கின்ற $x_1+2x_2=b$ என்ற மற்றெல்லாக் கோடுகளுக்கும் $b > \frac{59}{31}$ என்பதைச் சரி பார்த்து அறியலாம். எனவே சமனின்மைகள் (1.1)-ஐ நிறைவு செய்வதும் x_1+2x_2-க்கு மீச்சிறு மதிப்பைக் கொடுப்பதுவுமான தீர்வு $x_1=\frac{43}{31}$; $x_2=\frac{8}{31}$-ஆகும். இது C-ன் ஒரு கோடிப் புள்ளி என்பதும் நோக்கத்தக்கது. இந்த விவரங்கள் யாவும் அடுத்து வரும் பாடத்தில் விரிவாக நிரூபிக்கப்படும்.

1-5 ஒருங்கமை நேரியச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (Solution of Simultaneous Linear Equations)

ஒருங்கமை நேரியச் சமன்பாடுகளைச் சுருக்கமாகவும், எளிதாகவும் அணிகளின் குறியீட்டில் எழுதலாம். பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் கவனிக்கவும்.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x=b_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \quad (1.5)$$

இச்சமன்பாடுகளை

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix},$$

[1] இதை விடுபட்ட தடித்தக் கோட்டினால் படத்தில் காட்டியுள்ளோம்.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

என்று எடுத்துக்கொண்டு

$$A\,X = b \tag{1.6}$$

என எழுதலாம், A சதுர ஒருமையற்ற அணி என்றால் (அதாவது, $m=n$; $|A| \neq 0$ என்றால்)

(1.6)- லிருந்து

$$X = A^{-1}\,b$$

என்று கிடைக்கிறது. இவ்வாறு பெறப்படும் X தான் தீர்வு வெக்டர் ஆகும். இந்தத் தீர்வு வெக்டரையும் A^{-1} ஐயும் படிப் படியாகக் காணும் முறையை ஜோர்டான்-கௌஸ் முழு நீக்க முறை (Complete elimination method of Jordan and Gauss) என்கிறோம். இந்த முறையை எடுத்துக் காட்டொன்றால் விளக்கு கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு : பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து x_1, x_2, x_3-க்களின் ஒருங்கமைத் தீர்வு காண்க.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

A, X, P_0, P_i $(i = 1, 2, 3)$ என்ற அணிகளைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்க:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad P_0 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$P_i = A$-ன் i-வது நிரல் வெக்டர், $i = 1, 2, 3$. சமன்பாடுகள் (1.7)-ஐப் பின்வரும் இரு வமைப்புகளிலும் எழுதலாம்:-

(i) $A\,X = P_0$

(ii) $x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = P_0$

A-ஐச்சமன்பாடுகள் (1.7)-ன் குணகவணி (Coefficient Matrix) என்றும் கூறுவதுண்டு. A ன் அணிக் கோவை அதாவது $|A|$ பூச்சியத்திற்குச் சமமல்ல என்பதால் அது ஒருமையற்றச் சதுர அணி என்பது தெளிவாகிறது. மேலும் P_1, P_2, P_3 என்பன

முப்பரிமாண வெளி E^3-ல் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் ஆகும். [§ 1-2 (ஊ) பிரிவில் விளக்கிய முறைப்படி இவைகளை ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் என்று நிரூபிக்கலாம்.]

நாம் முப்பரிமாண வெளியில் கணக்கீடு செய்வதால் எந்த வெக்டரையும் ஒரேவொரு முறையில் தான் P_1, P_2, P_3-க்களின் நேரிய (ஒருபடி)ச் சேர்க்கையாக எழுத முடியும். x_1, x_2, x_3 என்பன P_0-ஐ P_1, P_2, P_3–க்களின் நேரியச் சேர்க்கையாக எழுதும் போது அவற்றின் குணகங்களாகும். முழு நீக்க முறை படிப்படியாக x_1, x_2, x_3 என்ற மாறிகளை முறையே (1.7)–ல் முதல், இரண்டாவது, மூன்றுவது சமன்பாட்டைத் தவிர மற்றவற்றிலிருந்து நீக்குகிறது.

படி (i) (1.7)-ல் இரண்டாவது, மூன்றுவது சமன்பாடுகளி லிருந்து x_1-ஐ நீக்குதல் இம்முறையின் முதற்படியாகும். A ஒருமையற்ற அணி என்பதால் தேவையானுல் சமன்பாடுகளின் வரிசையை மாற்றி முதல் சமன்பாட்டில் x_1-ன் குணகம் பூச்சியமாகாதவாறு பார்த்துக் கொள்ளலாம். நமது எடுத்துக் காட்டில் $a_{11} = 1 \neq 0$ என்று இருப்பதால் இந்த வரிசை மாற்றம் தேவையாக இல்லை. இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து x_1-ஐ நீக்க முதல் சமன்பாட்டை 3-ஆல் பெருக்கி அதை இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து கழிக்க வேண்டும். இதே போன்று மூன்று வது சமன்பாட்டிலிருந்து முதல் சமன்பாட்டைக் கழித்தால் x_1 அதிலிருந்து நீக்கப்பட்டு விடுகிறது. இறுதியில் நமக்குக் கிடைக்கும் சமன்பாடுகள் வருமாறு:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 4x_2 - 4x_3 &= -4 \\ 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

அதாவது,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 &= 3 \end{aligned} \quad \text{ஆகும்.}$$

படி (ii) இப்பொழுது x_2-ஐ இரண்டாவது சமன்பாட்டைத் தவிர மற்றெல்லாவற்றிலிருந்தும் நீக்குகிறேம். மூன்றுவது சமன் பாட்டை இரண்டாவது சமன்பாடாக மாற்றி எழுதி அதிலிருந்து $x_2 = 3$ எனக் கிடைக்கும் மதிப்பை முதல் இரண்டாவது (மாற்றிய பிறகு மூன்றுவது) சமன்பாடுகளில் ஈடு செய்தால் x_2 இரண்

டாவதைத் தவிர மற்றெல்லாச் சமன்பாடுகளிலிருந்தும் நீக்கப் பட்டுவிடும். இறுதியில் நாம் பெறும் சமன்பாடுகள் வருமாறு:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 &= 6 \\ x_2 \qquad &= 3 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

படி (iii) இப்பொழுது x_3-ஐ மூன்றுவதைத் தவிர மற்றெல்லாச் சமன்பாடுகளிலிருந்தும் நீக்குகிறோம். முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து மூன்றுவதைக் கழித்தால் x_3 முதல் சமன்பாட்டிலிருப்து நீங்கி விடும். இரண்டாவது சமன்பாட்டில் x_3 இருந்திருந்தால் இம் மாதிரியே அதை நீக்கி விடலாம். கடைசியாக கொடுத்துள்ள சமன் பாடுகள் (1.7)

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 2 \\ x_2 \qquad &= 3 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} (1.8)$$

எனச் சுருங்குகின்றன. இந்த முழு நீக்க முறையினுல் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள் (1.7)-ன் குணகங்களின் அணி A முப்பரிமாண ஓரலகு அணி I_3 ஆக மாற்றப்பட்டது. சமன் பாடுகள் (1.8)-ன் இடப்புறங்களை IX என்று எழுதலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும். இதிலிருந்து முழு நீக்க முறையினுல் ஏற்பட்ட மாற்றம் $A\,X = P_0$ என்பதை இடப்புறமாக A^{-1} ஆல் பெருக்குவதற்குச் சமமாகும் என்று தெளிவாகிறது.

பல கணக்குகளில் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளுடன் குணக வணியின் தன்மாற்று அணியையும் காண வேண்டியதாக இருக்கும். இதன் பொருட்டுப் பின்வரும். முறையைக் கையாள் கிறோம். A-ன் வலது புறத்தில் $m \times m$ ஓரலகு சதுரவணி I-ஐ எழுதி அதன் பின்னர் வலது புற நிரல் வெக்டரையும் சேர்த்து ஒரு பிரிப்பு அணியாக (Partitioned Matrix)க் கொடுத்துள்ள கணக்கை $(A \mid I \mid P_0)$ என்ற அமைப்பில் எழுதுவோம். இந்த விரிவு படுத்திய (Augmented) அணியை முன் மாதிரியே முழு நீக்க முறைக்கு உட்படுத்தினுல் இறுதியில் I-ன் இடத்து A^{-1}-ம், P_0-ன் இடத்து தேவையான தீர்வும் கிடைக்கும். அதாவது $(A \mid I \mid P_0)$ என்பது $(A^{-1} A \mid A^{-1} I \mid A^{-1} P_0)$ அல்லது $(I \mid A^{-1} \mid X)$ என்று மாறுகிறது.

இனி மேற்கண்ட முறைப்படி எடுத்துக் காட்டில் கண்ட கணக்கினைச் செய்வோம்.

$$(A \mid I \mid P_0) = \left(\begin{array}{rrr|ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

என்பது முதற்படியில்

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

என்ற பிரிப்பு அணியாக மாறுகிறது. பின்னர் இரண்டாவது படியில்

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -1 \end{array}\right)$$

அல்லது

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -4 \end{array}\right)$$

அல்லது

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 4 \end{array}\right)$$

என்று மாறுகிறது. மூன்ருவது படியில் இதுவே

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 4 \end{array}\right)$$

என மாறுகிறது, எனவே

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

என்றும்,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

என்றும் கிடைக்கிறது.

P_0-க்குச் சமமான P_1, P_2, P_3-க்களின் வீற்று (Unique) நேரியச் சேர்க்கை $2P_1 + 3P_2 + 4P_3$ எனத் தீர்மானிக்கப் பட்டது. ஆனல் P_1, P_2, P_3 முதலியன முப்பரிமாண வெளியில் அடிப்படை வெக்டர்கள் (Base Vectors) என்பதால் இவ்வெளியின் வேறெந்த வெக்டரையும் இவற்றின் நேரியச் சேர்க்கையாக ஒரே வொரு விதத்தில்தான் எழுதமுடியும், P_4 என்ற வெக்டர்

கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதை P_1, P_2, P_3-க்களின் வீற்று நேரியச் சேர்க்கையாக எழுத வேண்டுமென்றால்

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

என்ற வெக்டரை $AY = P_4 = y_1 P_1 + y_2 P_2 + y_3 P_3$ என்பதற்கிணங்கக் காணவேண்டும். இருபுறத்தையும் A^{-1} ஆல் பெருக்கினால்

$$A^{-1} A Y = A^{-1} P_4$$

அதாவது, $Y = A^{-1} P_4$

எனக் கிடைக்கிறது. எடுத்துக் காட்டாக

$$P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

என்றால்

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

எனவே

$$-\tfrac{1}{4} P_1 + 2 P_2 + \tfrac{1}{4} P_3 = P_4$$

இம்மாதிரியே,

$$P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

என்று கொண்டால்

$$-\tfrac{1}{4} P_1 + 0 P_2 - \tfrac{7}{4} P_3 = P_5$$

எனக் கிடைக்கிறது. இங்கு P_5 அடிப்படை வெக்டர்களுள் P_1, P_3 இரண்டு வெக்டர்களையே சார்ந்துள்ளது. இதற்குக் காரணம் P_1, P_3, P_5 என்ற வெக்டர்கள் தம்முள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டர்கள் என்பதே.

$$-\tfrac{1}{4} P_1 - \tfrac{7}{4} P_3 - 1 P_5 = 0$$

என்ற தொடர்பைக் கவனித்தால் இக்கூற்றின் உண்மை புலனாகும். ஏதாவதொரு வெக்டரை அடிப்படை வெக்டர்கள் கணத்தில் உள்ள எல்லா வெக்டர்களையும் பயன்படுத்தாமல் அவற்றுள் ஒரு சிலவற்றின் நேரியச் சேர்க்கையாகவே எழுதப்படக் கூடுமானால் அந்த நிலையைக் கேடுறுநிலை (Degenerate case) என்கிறோம்.

$AX = b$ என்ற சமன்பாட்டில் $b = 0$ என்றால் சமன்பாடு சமபடித்தானது (Homogeneous) என்றும் $b \neq 0$ என்றால் சமபடித்தானது அல்ல (Non-Homogeneous) என்றும் கூறுகிறோம்.

1-6 இருபடி அமைப்புகள் (Quadratic Forms)

E^n வெளியில் $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ஒரு புள்ளி எனின் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற மாறிகளைச் சார்ந்த சார்பை $f(X)$ அல்லது $g(X)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக $c_1 x_1^2 + c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_3 x_4^3$ என்பது x_1, x_2, x_3, x_4 என்னும் 4 மாறிகளில் ஒரு சார்பாகும். $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ என்ற பன்மாறிச் சார்பைச் சுருக்கமாக $f(X)$ என்று குறிப்பிடுகிறோம். இங்கு $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ என்ற வெக்டர் E^4-ன் ஒரு புள்ளியாகும்.

வரையறை : $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ என்க. f என்ற சார்பு

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i x_j \qquad (1.9)$$

(c_{ij} மாறிலிகள்) என்ற அமைப்பில் எழுதப்படக் கூடுமானால் அதை n மாறிகளில் இருபடி அமைப்பு என்கிறோம்.

இந்த அமைப்பில் $f(X)$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மாறிகளில் இருபடித்தானவை என்பதைக் கவனிக்கவும். எடுத்துக்காட்டாக, இருபரிமாண வெளி E^2-ல் ஓர் இருபடி அமைப்பின் பொது உரு (General Form)

$$f(X) = f(x_1, x_2) = c_{11} x_1^2 + (c_{12} + c_{21})\, x_1 x_2 + c_{22} x_2^2$$

ஆகும்.

$C = (c_{ij})$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், அது ஒரு சதுர அணி ஆகும். $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்ற வெக்டரை $n \times 1$ நிரல் வெக்டராக எழுதினால் (1.9)-ஐ

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= X' C X$$

என்ற அமைப்புக்குக் கொண்டு வரலாம். இருபரிமாண வெளியில் இதன் விளக்கம் கீழே தரப்படுகிறது.

$$f(X) = f(x_1, x_2) = X' C X$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (c_{11}\, x_1 + c_{21}\, x_2 \quad c_{12}\, x_1 + c_{22}\, x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= c_{11}\, x_1\, x_1 + c_{21}\, x_2\, x_1 + c_{12}\, x_1\, x_2 + c_{22}\, x_2\, x_2$$

$$= c_{11}\, x_1^2 + (c_{12} + c_{21})\, x_1\, x_2 + c_{22}\, x_2^2$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} c_{ij}\, x_i\, x_j$$

மேலும், X, C என்னும் எந்த $n \times 1$, $n \times n$ அணிகளுக்கும் $X'\,C\,X$ ஓர் 1×1 அணி அதாவது திசையிலி (Scalar) என்பதை கவனிக்கவும். இதிலிருந்து $X'\,C\,X$-ன் திருப்பு அணியும் அதற்குச் சமமே என்பது தெளிவாகும். நேரிடையாகவே இதைப் பின்வருமாறு எளிதாக நிரூபிக்கலாம்.

$$(X'\,C\,X)' = (CX)'\,(X')'$$
$$= X'\,C'\,(X')' = X'\,C'\,X$$

$X'C\,X$-ம் $X'\,C'\,X$-ம் சமம் என்பதை அவற்றின் விரிவுகளை எழுதிச் சரிபார்க்கலாம். எனவே

$$X'\,C\,X = \tfrac{1}{2}\,(X'\,CX + X'\,C'X) = \frac{X'\,(\,C + C\,)\,X}{2}$$

என்று கிடைக்கிறது. எந்த சதுர அணி C-க்கும் $\frac{1}{2}\,(\,C + C'\,)$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணியாகும். (ஏன்?) இதன் ij-வது மூலகம் $\frac{1}{2}\,(c_{ij} + c_{ji})$ இருபடி அமைப்பு $f(\,X\,)$-ல் x_i, x_jக்களின் பெருக்கலின் கெழுவாகவும், ji-வது மூலகம் $\frac{1}{2}\,(c_{ji} + c_{ij})$ அதில் x_j, x_i-களின் பெருக்கலின் கெழுவாகவும் அமைகின்றன. எனவே இருபடி அமைப்பில் $x_i\,x_j$ உறுப்பின் கெழுவை இவ்வாறு இரண்டு உறுப்புகளாகப் பிரித்து எழுதும் முறையைக் கையாண்டால் இருபடியமைப்பை $D = \frac{1}{2}\,(C + C')$ என்ற சமச்சீர் அணியைப் பயன்படுத்தி

$$f(\,X\,) = X'C\,X = X'\,D\,X$$

என்று எழுதலாம். ஆகவே, இனி இருபடி அமைப்பை அணிப் பெருக்கலாக எழுதும் போது C என்னும் அணியையே பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாமல் (Without Loss of Generality) சமச்சீர் அணியாக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

வரையறை : $X \neq 0$ என்னும்போது $f(X) = X'CX > 0$ என்று இருந்தால் இருபடியமைப்பு மிகையுறுதியானது (Positive Definite) எனப்படும். மேலும், ஒரு $X \neq 0$-க்கு ஆவது $X'CX = 0$ என்று இருந்து $X'CX \geq 0$ என்பதும் உண்மையாக இருந்தால் இருபடியமைப்பு மிகையரையுறுதியானது (Positive Semi-definite) எனப்படும். இம்மாதிரியே குறையுறுதி, (Negative Definite), குறையரையுறுதி (Negative Semi-definite) இருபடி அமைப்புகளையும் வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, முப்பரிமாண வெளியில்

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1 x_3 + 2x_2 x_3$$
$$= (x_1 - x_2 - x_3)^2$$

என்பது அனைத்து x_1, x_2, x_3-களுக்கும் குறையல்லா எண் ஆகும். ஆனல் $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ என்னும்போது பூச்சியம் ஆகிறது. எனவே, இது மிகையரையுறுதி இருபடி அமைப்பு ஆகும். ஆனல் $f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ என்பது $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ என்னும் போது மட்டுமே பூச்சியம் என்பதால் மிகையுறுதி இருபடி அமைப்பாகும்.

மாறிகளின் எண்ணிக்கை சிறு எண்ணுக இருந்தால் பின் வரும் தேற்றத்தைக்கொண்டு இருபடியமைப்புகளின் மிகையுறுதித் தன்மையைக் கண்டறியலாம்.

தேற்றம் (1.3): $f(X) = X'CX$ என்ற இருபடி அமைப்பு மிகையுறுதித்தன்மையது எனின் அதன் முதன்மைச் சிற்றணி கோவைகள். அதாவது, முதன்மை (Principal) மூலை விட்டத்தின் வழியே படிப்படியாக விரிவாக்கி எழுதப்பட்ட சிற்றணிகோவைகள் (Minors along the Principal Diagonal), யாவும் மிகை எண்கள் ஆகும். இதன் மறுதலையும் உண்மையே.

இதன் நிரூபணம் இங்கு கொடுக்கப்படவில்லை. (Linear Algebra, by G. Hadley, பக்கம் 260 பார்க்கவும்.) முப்பரிமாண வெளியில் $f(X) = X'CX$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

என்ருல் $f(X)$ மிகையுறுதி இருபடி அமைப்பாவதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடுகள்:

$$c_{11} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0$$

என்பதாகும்.

$f(C) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ என்னும்போது

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

$$c_{11} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad |C| > 0$$

என்பதைக் கவனிக்கவும். இதே போன்று

$$f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$$

என்றால்

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

$$C_{11} = 1 > 0 ; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \ |C| = 0$$

என்பதால் $f(X)$ மிகையுறுதித்தன்மையது அல்ல.

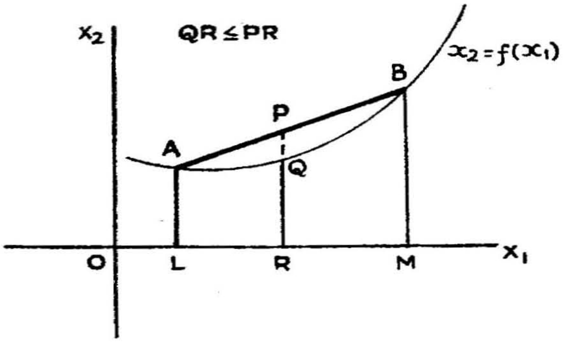
1-7 குவிச் சார்புகள் (Convex Functions)

இப் பகுதியில் குவிச்சார்புகள் என்றால் என்ன, இருபடியமைப்புகளோடு அவற்றின் தொடர்பு என்ன என்பனவற்றைப் பற்றி சில தேற்றங்களைப் பார்ப்போம்.

வரையறை : யூக்ளிட் n-பரிமாண வெளி E^n-ல் K ஒரு குவிகணம். அனைத்து $X \in K$-க்கும் $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. அனைத்துப்புள்ளிகள் $x_1, x_2 \in K$க்கும் $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ என்றுள்ள அனைத்து λ-க்கும் $f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] \leqslant \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$ (1-10) என்ற கூற்று உண்மையானால் f குவிச்சார்பு எனப்படும். $\leqslant$ என்பதற்குப் பதில் $<$ என்று (1.10)-ல் இருக்குமானால் f சரியான குவிச்சார்பு (Strictly Convex Function) என வழங்கப்படும். மேலும், (1-10)-ல் $\leqslant$-க்குப் பதில் $\geqslant$ என்று இருக்குமானால் [அதாவது $-f(X)$ குவிச்சார்பு என்றால்]

f-ஐ குழிவுச்சார்பு (Concave Function) என்று கூறுகிறோம். இம் மாதிரியே சரியான குழிவுச் சார்பையும் வரையறுக்கலாம்.

படம் (1.11)-ல் ஒரே மாறிச் சார்பு $f(x)$-ன் குவித்தன்மை காட்டப்பட்டுள்ளது. x', x'' என்ற விடங்களில் f என்னும் சார்பு $f(x')$, $f(x'')$ என்ற மதிப்புகளை ஏற்கிறது. $0 < \lambda < 1$ என்றால் $[\lambda x' + (1-\lambda) x'',\ \lambda f(x') + (1-\lambda)\ f(x'')]$ என்ற புள்ளி $A(x', f(x'))$, $B(x'', f(x''))$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத்துண்டு AB-ன் மேல் அமையும். f குவிச்சார்பு என்றால் $f(\lambda x' + (1-\lambda)x'')$-ன் மதிப்பு $\lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'')$-ஐ விடக் குறைவாகவே இருக்கும். எனவே $x_2 = f(x_1)$ என்ற வளைவரையிலிருந்து f-க்கு A, B-க்களுக்கு இடைப்பட்ட புள்ளிகளில் பெறப்படும் மதிப்பு AB என்ற கோட்டிலிருந்து பெறப்படும் மதிப்பை விடக் குறைவாகவே இருக்கும். அதாவது A, B-க்களுககு இடைப்பட்ட வளைவரையின் பகுதி நேர்கோடு AB-க்குக் கீழேயே இருக்கும். இதையே வேறு விதமாக, 'ஒரு சார்பு குவிந்தது எனின் அதன் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோட்டுத்துண்டின் எந்தப் புள்ளியிலும் சார்பு ஏற்கும் மதிப்பு, அதற்குச் சரியாக வரையின் மீதுள்ள புள்ளியில் அது ஏற்கும் மதிப்பைவிட அதிகமானதாகும்', என்று கூறலாம்.



படம் (1.11)

முதற்படிச் சார்பு குவிந்த அல்லது குழிந்த சார்பாக எடுத்துக் கொள்ளப்படலாம். பல குவிச்சார்புகளின் கூடுதலும் ஒரு குவிச்சார்பே யாகும்.

தேற்றம் (1.4) : மிகையரையுறுதி இருபடி அமைப்பு $X' C X$-ஐ அனைத்து $X \in E^n$-க்கும் $f(X)$ என்ற சார்பாக வரையறுத்தால் f குவிச்சார்பாகும்.

நிறுவல் : அனைத்து $X_1, X_2 \in E^n$–க்கும், $0 < \lambda < 1$ என்றுள்ள அனைத்து λ-க்கும்

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \leqslant \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2)$$

அல்லது

$$f[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] - \lambda f(X_1) - (1-\lambda) f(X_2) \leqslant 0$$

என நிரூபித்தல் போதுமானது. (1.11)

நமது முந்திய கூற்றின்படி (§1.6 பார்க்கவும்) பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாத வகையில் C-ஐச்சமச்சீர் அணியாகக் கொள்ளலாம். எனவே

$$X'_2 C X_1 = X'_1 C X_2 \quad \text{(ஏன்?)}$$

ஆகையால் (1.11)–இல் இருந்து $f(X) = X' C X$ என்பதால்

$$\begin{aligned}
&[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2]' C [\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \\
&\quad - \lambda X_1' C X_1 - (1-\lambda) X_2' C X_2 \\
&= \lambda^2 X_1' C X_1 + \lambda(1-\lambda) X_1' C X_2 + \lambda(1-\lambda) X_2' C X_1 \\
&\quad + (1-\lambda)^2 X_2' C X_2 - \lambda X_1' C X_1 - (1-\lambda) X_2' C X_2 \\
&= (\lambda^2-\lambda) X_1' C X_1 + [(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)] X_2' C X_2 \\
&\qquad + 2\lambda(1-\lambda) X_1' C X_2 \\
&= \lambda(\lambda-1)[X_1' C X_1 + X_2' C X_2 - 2 X_1' C X_2] \\
&= \lambda(\lambda-1)(X_1 - X_2)' C (X' - X_2) \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

$X'CX$ மிகையரையுறுதி இருபடி அமைப்பு என்பதால், அனைத்து $X \in E^n$-க்கும் $X' C X \geqslant 0$ ஆகவேண்டும். மேலும் $0 < \lambda < 1$ என்னும்போது $\lambda(\lambda-1) < 0$ என்றும் $\lambda = 0, 1$ என்றால் $\lambda(\lambda-1) = 0$ என்றும் இருப்பதால் $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ என்னும்போது $\lambda(\lambda-1) \leqslant 0$ ஆகும். எனவே (1.12)-இல் இருந்து அச்சமன்பாட்டின் வலப்புறம் அனைத்து $X_1, X_2 \in E^n$-க்கும் மிகையல்லாதது எனத்தெரிகிறது. எனவே $f(X) = X' C X$ அனைத்து $X \in E^n$-க்கும் குவிச்சார்பு என்பது நிரூபிக்கப்பட்டது.

வரையறை : E^n-ன் உட்கணம் K. அனைத்து $X \in K$-க்கும் K-யில் X_0 என்ற புள்ளி $f(X_0) \leqslant f(X)$ என்னுமாறு இருந்தால் X_0-ஐ K-யில் $f(X)$-ன் அனைத்திடத்து மீச்சிறுமம் (Global Minimum) என்றும் $f(X_0)$-ஐ K-யில் $f(X)$ ன் அனைத்திடத்து மீச்சிறு மதிப்பு என்றும் கூறுகிறோம்.

E^n வெளியில் X_0 என்னும் புள்ளி கொடுக்கப்பட்டால்

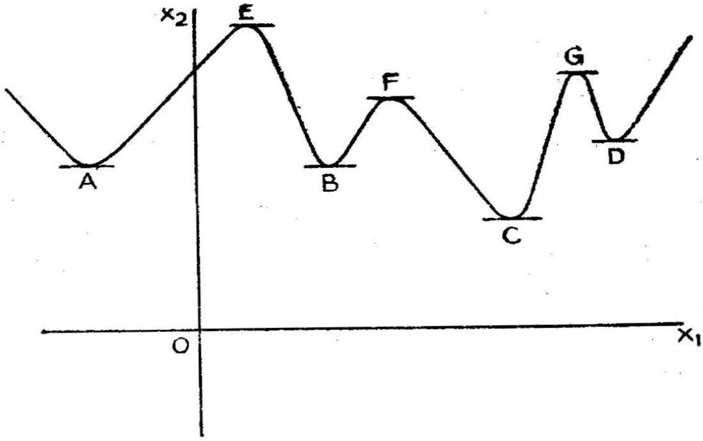
$$N_\varepsilon (X_0) = \{ X : X \in E^n \ \& \ \| X - X_0 \| < \varepsilon \}$$

என்ற கணத்தை X_0-ன் ε-அண்மை வெளி (Neighbourhood) என்கிறோம். ($\| X \|$ -ன் வரையறை § 1-2-ல் தரப்பட்டுள்ளது.)

X_0-ன் ε அண்மை வெளியில் உள்ள அனைத்து X-களுக்கும் $f(X_0) \leqslant f(X)$ என்பது உண்மையாகுமாறு X_0-ஐக் காண முடிந்தால் அதை $f(X)$-ன் ஒரிடத்து மீச்சிறுமம் (Local Minimum) என்றும் $f(X_0)$-ஐ $f(X)$-ன் ஒரிடத்து மீச்சிறு மதிப்பு என்றும் கூறுகிறோம்.

படம் (1.12)-ல் ஒரே மாறிச் சார்பு $f(x_1)$-க்கு அனைத்திடத்து மீச்சிறுமம் C என்ற புள்ளியிலும் ஒரிடத்து மீச்சிறுமங்கள் A, B, D என்ற புள்ளிகளில் இருப்பதையும் காணலாம். தவிரவும், அனைத்திடத்து மீச்சிறுமப் புள்ளி அவ்விடத்து ஒரிடத்து மீச்சிறுமமும் ஆகும் என்பது கவனிக்கத்தக்கது. ஆனால் இக்கூற்றின் மறுதலை உண்மையல்ல. அதாவது, ஒரிடத்து மீச்சிறுமங்கள் எல்லாம் அனைத்திடத்து மீச்சிறுமம் ஆகா.

இம்மாதிரியே தகுந்த மாற்றங்களுடன் அனைத்திடத்து மீப்பெருமம், ஒரிடத்து மீப்பெருமம் ஆகியவற்றையும் அவ்விடத்து மீப்பெரு மதிப்புகளையும் வரையறுக்கலாம்.



படம் (1.22)

படம் (1.12)-ல் E, F, G என்ற புள்ளிகளில் $f(x_1)$ என்ற ஒரே மாறிச் சார்பு ஒரிடத்து மீப்பெருமங்களைப் பெற்றுள்ளது.

A-க்கு முன்னரும் D-க்குப் பின்னரும் $f(x_1)$-ன் மதிப்புகள் அதிகரித்துக் கொண்டே போவதால் E^n-ல் இச்சார்பின் அனைத் திடத்து மீப்பெருமம் வரம்பற்றது. வரையில் A-க்கும் B-க்கும் இடைப்பட்டப் பகுதியை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டால் E-ல் அனைத்திடத்து மீப்பெருமம் கிடைக்கிறது.

அடுத்துவரும் தேற்றத்தில் குவிச்சார்புகளின் மீச்சிறுமத் தைப் பற்றிக் கூறுகிறேம்.

தேற்றம் (1.5) : E^n-ன் ஒரு குவிகணம் K. $f(X)$ அனைத்து $X \in K$-க்கும் குவிச்சார்பு என்றுல் அது ஒன்றுக்கு மேற்படாத ஓரிடத்து மீச்சிறுமத்தைப் பெற்றிருக்கக் கூடும். ஓரிடத்து மீச்சிறுமம் ஒன்றைப் பெற்றிருந்தால் அதுவே அனைத்திடத்து மீச்சிறுமமாகவும் ஆகிறது. தவிரவும், அம்மீச்சிறும மதிப்பை $f(X)$ குவிகணமொன்றின் புள்ளிகளில் ஏற்கும்.

நிறுவல் : X_0 என்ற விடத்து $f(X)$ ஓரிடத்து மீச்சிறுமம் ஒன்றைப் பெற்றிருக்கிறது என்க. $\overline{X}$ கணம் K-ன் ஏதாவதொரு புள்ளி ஆகுக. $0<\lambda<1$ என்னுமாறு λ இருந்தால் $(1-\lambda) X_0+\lambda X$ என்பதும் K-ன் புள்ளியாகும். தேவையான அளவு λ-ன் மதிப் பைக் குறைத்து இப்புள்ளி $N_\varepsilon(X_0)$-ல் இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்ளலாம். X_0 ஓரிடத்து மீச்சிறுமம் என்பதால் அனைத்து $X \in N_\varepsilon(X_0)$-க்கும் $f(X_0) < f(X)$ என்பது உண்மையாகுமாறு ε-ஐக் காணமுடியும். இந்த ε-க்குத் தகுந்தவாறு λ-ஐத் தேர்ந் தெடுத்தால்

$$\begin{aligned} f(X_0) &< f[\lambda \overline{X} + (1-\lambda)X_0] \\ &< \lambda f(\overline{X}) + (1-\lambda) f(X_0) \end{aligned} \tag{1.13}$$

எனக் கிடைக்கிறது. கடைசிச்சமனின்மை சார்பு f-ன் குவித் தன்மையிஞல் பெறப்பட்டது. (1.13)-ல் $f(X_0)$ உறுப்புகளை ஒரே புறம் கொணர்ந்து $\lambda(>0)$-ஆல் வகுத்தால்

$$f(X_0) < f(\overline{X})$$

என்று கிடைக்கிறது. $\overline{X}$ என்பது K-ன் ஏதாவதொரு புள்ளி என்பதால் X_0- K-ல் $f(X)$-ன் அனைத்திடத்து மீச்சிறுமம் என்பது தெளிவாகிறது. X_0 என்ற ஏதாவதொரு ஓரிடத்து மீச்சிறுமப் புள்ளியில் $f(X)$-ன் மதிப்பு அனைத்து இடத்து மீச்சிறு மதிப் பிற்குச் சமம் என்பதால் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஓரிடத்து மீச்சிறு மதிப்புகள் இருக்க முடியாது என்பதும் புலனுகிறது.

இனி, X_0, X_1 என்ற இருபுள்ளிகளிலும் $f(X)$ தன் மீச்சிறு மதிப்பு M-ஐ ஏற்றால் X_0, X_1 என்ற புள்ளிகளின் எந்தக் குவிச் சேர்க்கையிலும் அது M என்ற மதிப்பை ஏற்கும், என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

ஆனால்

$$\begin{aligned} M &\leqslant f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_0] \\ &\leqslant \lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_0) \\ &= \lambda M + (1-\lambda) M = M \end{aligned}$$

எனவே, $f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_0] = M$

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் (1·6) : E^n-ன் உட்கணம் K,

$$g_i(X) \leqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots m$$
$$X \geqslant 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் வெக்டர்கள் X களால் ஆனது. எல்லா $g_i(X)$-களும் குவிச்சார்புகள் என்றால் K ஒரு குவிகணம் ஆகும். (K வெற்றுக் கணம் அல்ல, அதாவது K-ல் ஒரு புள்ளி X-ஆவது இருக்கும் என்று கொள்கிறோம்.)

நிறுவல் : ஏதாவது இரண்டு $X_1, X_2 \in K$-க்கும் $0 < \lambda < 1$ என்ற வாறுள்ள λ-க்கும்

$$\overline{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$$

என்க. $\overline{X}$-ம் K-ன் ஒரு புள்ளியே என நிறுவதல் போதுமானது. அதாவது, $\overline{X} \geqslant 0$ என்றும் $g_i(\overline{X}) \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ என்றும் நிறுவுதல் வேண்டும். λ, $(1-\lambda)$ இரண்டும் குறையல்லா எண்கள். மேலும், $X_1 \geqslant 0$, $X_2 \geqslant 0$ என்பதால் $\overline{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \geqslant 0$ ஆகும். ஒவ்வொரு i-க்கும், g_i குவிச்சார்பு என்பதால்,

$$\begin{aligned} g_i(\overline{X}) &= g_i[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] \\ &\leqslant \lambda g_i(X_1) + (1-\lambda) g_i(X_2) \end{aligned}$$

ஆனால் $g_i(X_1) \leqslant 0$, $g_i(X_2) \leqslant 0$, $0 < \lambda < 1$ என்று இருப்பதால் $g_i(\overline{X}) \leqslant 0$ என்பதும் உண்மையே.

குறிப்பு : தேற்றங்கள் (1.5), (1.6) களிலிருந்து $X \geqslant 0$ என்னும் வெக்டர் $g_i(X) \leqslant 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்தால், $g_i(X)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ குவிச்சார்புகள் என்றால், குவிச்சார்பு $f(X)$-ன் ஓரிடத்து மீச்சிறுமம் அனைத்திடத்து மீச்சிறுமமும் ஆகும் என்று அறிகிறோம்.

1-8 சரிவு வெக்டரும் சேணப் புள்ளியும் (The Gradient Vector and the Saddle Point).

இப் பகுதியில் சரிவு வெக்டர், சேணப்புள்ளி ஆகியவற்றின் வரையறைகளும் அவற்றின் ஒருசில பண்புகளும் விவரிக்கப்படும்.
வரையறை : $f(x_1, x_2, .., x_n) = f(X)$ என்ற சார்பும் அதன் முதல் வரிசை பகுதிவகைக் கெழுக்கள் அனைத்தும் E^n-ன் உட்கணம் ஒன்றில் தொடர்ச்சி (Continuity) பெற்ற சார்புகள் என்றால் இந்த உட்கணத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளி X_0—உடன் தொடர்பு கொண்டதாக அப்புள்ளியில் $f(X)$-ன் சரிவு வெக்டர் எனப்படும் n மூலகங்களைக் கொண்ட நிரை வெக்டர் $\nabla f(X^0)$-ஐ

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\right)$$

என்ற சமன்பாட்டால் வரையறுக்கின்றோம்.

இங்கு $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ என்றால்

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \frac{\partial f(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})}{\partial x_i}$$

$$= \left[\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\right] x_1 = x_{01}, x_2 = x_{02}, \ldots x_n = x_{0n}$$

ஆகும்.

வழக்கமான முப்பரிமாண வெக்டர் பகுப்பாய்வு இயலில் (Vector Analysis of Three Dimensions) $f(x, y, z)$ என்பது ஸ்கேலார் புள்ளிச்சார்பு எனின்

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

என்பது f-ன் சரிவு வெக்டர் என வரையறுக்கப்பட்டு இருப்பதை ஒப்பிடவும்.

X_0 வழிச்செல்லும் $f(X)$-ன் உருவரை (Contour)க்குச் செங்குத்தாக $\nabla f(X_0)$ என்னும் வெக்டர் அமையும். (§ 1.7(இ)-ல் செங்குத்து வெக்டர்களின் வரையறை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது). சரிவு வெக்டரின் திசை $f(X)$-ன் மீப்பெரு அதிகரிக்கும் திசை' யாகும் (Direction of Maximum Increase). இந்தத் திசையை மீச்செங்குத்து ஏற்ற திசை (Direction of Steepest Ascent) என்றும் கூறுவர்.

வகை நுண் கணிதத்தின் (Differential Calculus) வாயிலாக $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்னும் n-மாறி வகைபடுச்சார்பு f-ன் அரங்கத்தின் உட்புள்ளி X_0-ல் மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடுகள்

$$\left[\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}\right]_{X = X_0} = \left[\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j}\right] = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

ஆகும், என்று நாம் அறிவோம்.

தேற்றம் (1.7): திறந்த குவிகணம் K-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள வகைபடுச்சார்பு $f(X)$ குவிச்சார்பாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும், போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு, அனைத்து $X_1, X_2 \in K$-க்கும்

$$f(X_1) - f(X_2) \geqslant (X_1 - X_2)' \, \nabla f(X_2) \quad (1.14)$$

என்பதாகும்.

நிறுவல்: (*i*) கட்டுப்பாடு தேவையானது என நிறுவுவோம். அதாவது, $f(X)$ குவிச்சார்பு என்றால் (1.14) உண்மையே என நிரூபிக்கவேண்டும். $0 < \lambda < 1$ என்னும்போது அனைத்து $X_1, X_2 \in K$-க்கும்

$$\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \leqslant f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2]$$

ஆகையால்,

$$\lambda f(X_1) - \lambda f(X_2) \geqslant f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] - f(X_2)$$

அல்லது

$$f(X_1) - f(X_2) \geqslant \frac{f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] - f(X_2)}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \{ f[X_2 + \lambda(X_1 - X_2)] - f(X_2) \}$$

சமனின்மையின் இடதுபுறம் λ-ஐச்சாராமல் உள்ளது. ஆனால் $\lambda \to 0$ என்னும்போது வலப்புறம் $(X_1 - X_2)' \, \nabla f(X_2)$ என்பதற்கு ஒருங்குகிறது. (எப்படி?) எனவே

$$f(X_1) - f(X_2) \geqslant (X_1 - X_2)' \, \nabla f(X_2)$$

(*ii*) கட்டுப்பாடு (1.14) போதுமானதாகும் என நிறுவுகிறோம். அதாவது (1.14) உண்மையென்றால் f குவிச்சார்பு என நிரூபித்தல் வேண்டும்,

$X_1,\ X_2,\ \in K$ என்றும் $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ என்னுமாறு λ-வும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, K குவிகணம் என்பதால்,

$X_3 = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$ -ம்

கணம் K-ல் அமையும். எனவே,

$$f(X_1) - f(X_3) \geqslant (X_1 - X_3)' \nabla f(X_3) \quad (1.15)$$

$$f(X_2) - f(X_3) \geqslant (X_2 - X_3)' \nabla f(X_3) \quad (1.16)$$

சமனின்மைகள் (1.15), (1.16)–களை முறையே $\lambda, 1-\lambda$ என்னும் மிகை எண்களால் பெருக்கிக் கூட்டினால்

$$\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) - \lambda f(X_3) - (1-\lambda) f(X_3)$$
$$\geqslant \lambda (X_1 - X_3)' \nabla f(X_3) + (1-\lambda)(X_2 - X_3)' \nabla f(X_3)$$

அல்லது

$$\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \geqslant f(X_3) + [\lambda X_1' + (1-\lambda) X_2'] \nabla f(X_3)$$
$$[-\lambda - (1-\lambda)] X_3' \nabla f(X_3)$$

அல்லது

$$\lambda f(X_1) + (1-\lambda) f(X_2) \geqslant f(X_3) = f[\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2]$$

எனவே f குவிச்சார்பு ஆகும்.

தேற்றம் (1.8): குவிகணம் K-ல் தொடர்ச்சியுடைய, வகைபடு, குவிச்சார்பு $f(X)$ என்க. அனைத்து $X \in K$-க்கும்

$$(X - X_0)' \nabla f(X_0) \geqslant 0 \quad (1.17)$$

என்பது, அனைத்து $X \in K$-க்கும் $f(X_0) \leqslant f(X)$ என்பதற்கு அதாவது, X_0-ல் $f(X)$ மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடு ஆகும்.

நிறுவல்: (i) கட்டுப்பாடு (1.17) தேவையானது என முதலில் நிரூபிக்கின்றோம். X_0 கணம் K–ன் அகப்புள்ளி (interior point) என்றால் $f(X_0) \leqslant f(X)$ என்பதிலிருந்து $f(X_0)$ என்பது $f(X)$–ன் மீச்சிறு மதிப்பு ஆகிறது. எனவே, $\nabla f(X_0) = 0$ ஆகும். ஆகையால் $(X-X_0)' \nabla f(X_0) = 0$ மாறாக, K–ன் வரம்புப் புள்ளி (boundary point) யாக X_0 இருக்குமானால் தேற்றம் (1.5)–லிருந்து

$$f(X_0) \leqslant f[\lambda X + (1-\lambda) X_0]$$

என்பது அனைத்து $X \in K$-க்கும் $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ என்றவாறு இருக்கும் எந்த λ-க்கும் உண்மையாகும். எனவே, $\lambda > 0$ என்றால்

$$\frac{1}{\lambda}\ \{ f\,[X_0+\lambda\ (X-X_0)]-f(X_0)\}\geqslant 0$$

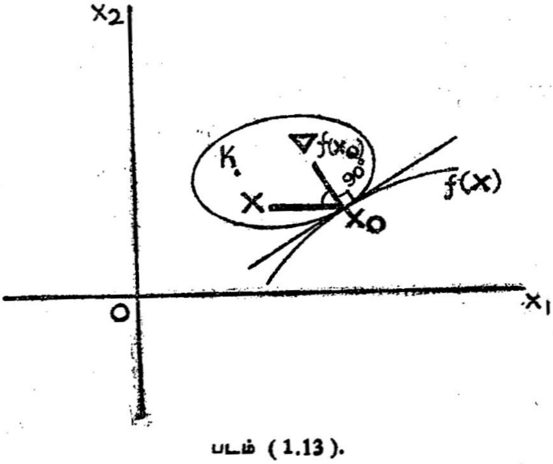
எனக் கிடைக்கிறது. இது $\lambda\to 0$ என்னும் போது கட்டுப்பாடு **(1.17)**-க்குச் சுருங்குகிறது.

(*ii*) இனி கட்டுப்பாடு (**1.17**) போதுமானது என நிரூபிப்போம். அனைத்து $X\in K$-க்கும் (**1.17**) உண்மை யென்றால் சார்பு $f(X)$-ன் குவித்தன்மையிலிருந்தும் தேற்றம் **(1.7)**-இல் இருந்தும்

$$f(X)-f(X_0)\geqslant(X-X_0)'\,\nabla f(X_0)\geqslant 0$$

என்று கிடைக்கிறது. எனவே, அனைத்து $X\in K$-க்கும் $f(X)\geqslant f(X_0)$ அல்லது X_0-ல் $f(X)$ மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கிறது என்பது தெளிவாகிறது.

குறிப்பு : வடிவ கணித நோக்கில் இத் தேற்றத்திலிருந்து X_0 மீச்சிறுமப் புள்ளி எனின் அனைத்து $X\in K$-க்கும் $\nabla f(X_0)$, $(X-X_0)'$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 90°-க்கு சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ தான் இருக்க வேண்டும் என்று கூறலாம். படம் (**1.13**)-ல் இது விளக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் (**1.13**).

அடுத்து வரும் வரையறை சேணப் புள்ளியை விளக்குகிறது.

வரையறை : X, X_0 என்பன n-பரிமாண வெக்டர்கள்; π, π_0 என்பன m-பரிமாண வெக்டர்கள். $F(X,\pi)$ என்ற சார்பு

X, π-களுக்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மிகை எண் ϵ-ஐ X_0, π_0 களின் ϵ-அண்மைவெளியில் உள்ள அனைத்து X, π-களுக்கும்

$$F(X_0, \pi) \leqslant F(X_0, \pi_0) \leqslant F(X, \pi_0) \qquad (1.18)$$

என்பதற் கிணங்கக் காண முடிந்தால் (X_0, π_0)-ஐ சார்பு $F(X, \pi)$-ன் ஓரிடத்துச் சேணப் புள்ளி எனப்படும்.

சமனின்மைகள் (1.18) அனைத்து (X, π)-களுக்கும் உண்மையானால் (X_0, π_0)-ஐ $F(X, \pi)$-ன் அனைத்திடத்துச் சேணப் புள்ளி என்கிறோம்.

பின்வரும் அதிபர தளத்தைப் பற்றிய தேற்றம் மிகுந்த முக்கியத்வம் பெற்றது. அதன் கூற்றைப் போன்று நிரூபணம் அவ்வளவு எளிதல்ல. எனவே இங்கு நிரூபணம் தரப்படவில்லை.

தேற்றம் (1.9): (பிரிக்கும் அதிபர தளத் தேற்றம்): K_1, K_2 என்ற குவிகணங்கள் அதிகபட்சம் அவற்றின் வரம்புப் புள்ளிகளை மட்டுமே பொதுப் புள்ளிகளாகக் கொண்டவை என்றால் $a \cdot X = b$, $a \neq 0$ என்னும் அதிபர தளம் (b திசையிலி, a n மூலக வெக்டர்)

$$\left.\begin{array}{l} \text{அனைத்து } X \in K_1\text{-க்கும் } a \cdot X \leqslant b \\ \text{அனைத்து } X \in K_2\text{-க்கும் } a \cdot X \geqslant b \end{array}\right\}$$

என்னுமாறு காணப்படக் கூடும்.

மேலே தேற்றத்தில் காணப்பட்ட அதிபரதளம் $a.X = b$ கொடுத்துள்ள குவிகணங்கள் K_1, K_2-க்களைப் பிரிக்கும் அதிபர தளம் எனப்படும். 261649 B (13)3IL8

1.9 கூஹ்ன்-டக்கர் கட்டுப்பாடுகள் (Kuhn-Tucker Conditions):

இந்தப் பகுதியில் சில கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் குவிச் சார்பு $f(X)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காணும் முறை விளக்கப்படுகிறது.

$f(X), g_i(X), i=1,2,\ldots, m$ என்பன தொடர்ச்சி பெற்ற, வகைக்கத்தக்க குவிச்சார்புகள். $f(X)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பை

$$\left.\begin{array}{r} X \geqslant 0 \\ g_i(X) \leqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (1.19)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண வேண்டும் என்க. இந்தப் பிரச்சினையை குவிநெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை (convex programming problem) என்று கூறுகிறோம்.

$\pi_i, i = 1, 2, \ldots, m$ என்னும் மாறிகளை எடுத்துக் கொண்டு

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m), \; X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

என்னும் மாறிகளில்

$$F(x, \pi) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(X) \tag{1.20}$$

என்ற சார்பை வரையறுக்கவும். இச்சார்பு லாக்ராஞ்சிச் சார்பு (Lagrangian function) என்றும் π_i-கள் லாக்ராஞ்சிப் பெருக்கிகள் (Lagrangian multpliers) என்றும் வழங்கப்படுகின்றன. லாக்ராஞ்சிச் சார்புக்கான சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினையையும் மேலே விவரிக்கப்பட்ட குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு பெற்றவை என நிறுவி அதன் வழியாகக் குவி நெறிப் படுத்தும் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண முயல்வதே நமது நோக்கம் ஆகும்.

லாக்ராஞ்சிச் சார்புக்கான சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினை:

அனைத்து $X \geqslant 0$, $\pi \geqslant 0$-க்கும் லாக்ராஞ்சிச் சார்பு $F(X, \pi)$ வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு X, π என்பன முறையே n, m பரிமாண வெக்டர்கள். குறையல்லா வெக்டர்கள் X_0, π_0 களை

$$F(X_0, \pi) \geqslant F(X_0, \pi_0) \leqslant F(X, \pi_0) \tag{1.21}$$

என்னுமாறு காண வேண்டும். (X_0, π_0)-ஐக் குறையல்லாச் சேணப் புள்ளி என்கிறோம். (1.21)-ஐ பின்வருமாறும் எழுதலாம் :

$$\begin{aligned} F(X_0, \pi_0) &= \underset{\pi \geqslant 0}{\text{மீப்பெருமம்}} \left[\underset{X \geqslant 0}{\text{மீச்சிறுமம்}}\, F(X, \pi)\right] \\ &= \underset{X \geqslant 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left[\underset{\pi \geqslant 0}{\text{மீப்பெருமம்}}\, F(X, \pi)\right] \end{aligned}$$

குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு X_0-ம் சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினையின் சேணப் புள்ளி (X_0, π_0)-ம் பின்வரும் கூஹன்-டக்கர் தேற்றத்தால் தொடர்புப் படுத்தப்படுகின்றன.

தேற்றம் (1.10): குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கு X_0 தீர்வு என்றால் π_0 என்னும் வெக்டரை (X_0, π_0) சேணப் புள்ளி பிரச்சினைக்குத் தீர்வு ஆகுமாறு காணலாம். மறுதலையாக (X_0, π_0) சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினையின் தீர்வு என்றால் X_0 குவி நெறிப் படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு ஆகும்.

நிறுவல் : மறுதலையை முதலில் நிரூபிக்கின்றோம்.

$$F(X, \pi) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(X)$$

என்ற லாக்ராஞ்சிச் சார்பின் சேணப் புள்ளி (X_0, π_0) என்க. சமனின்மைகள் (1.21)-ல் இருந்து அனைத்து $X \geqslant 0, \pi \geqslant 0$-க்கும்

$$f(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(X_0)$$

$$\leqslant f(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \pi_{i0} g_i(X_0) \quad (1.22)$$

$$\leqslant f(X) + \sum_{i=1}^{m} \pi_{i0} g_i(X)$$

என்று கிடைக்கிறது. இங்கு $\pi_0 = (\pi_{10}, \pi_{20}, \ldots, \pi_{m0})$ என எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டது. (1.22)-ன் முதல் சமனின்மையி லிருந்து,

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(X_0) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \pi_{i0} g_i(X_0) \quad (1.23)$$

என்று அறிகிரோம். அனைத்து i-க்கும் $g_i(X_0) \leqslant 0$ ஆகவேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனின் ஏதாவதொரு i-க்கு $g_i(X_0) > 0$ என்பதால் அதற்கு ஏற்ற $\pi_i > 0$-ஐ தேவைக் கேற்பப் பெரிய எண்ணுகத் தேர்ந்தெடுத்து சமனின்மை (1.23)-க்கு முரண்பாடு காணலாம். மேலும் $X_0 \geqslant 0$ என்பதால், X_0 குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக் கான கட்டுப்பாடுகள் (1.19)-களை நிறைவு செய்கிறது. அனைத்து $\pi \geqslant 0$-க்கும் (1.23) உண்மை என்பதால் $\pi = 0$ என்னும்போது

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \pi_{i0} g_i(X_0)$$

எனக் கிடைக்கிறது. ஆனல் $\pi_0 \geqslant 0$, அனைத்து i-க்கும் $g_i(X_0) \leqslant 0$ என்பதால் $\sum_{i=1}^{m} \pi_{i0} g_i(X_0) \leqslant 0$ என்பதும் உண்மை யாக வேண்டும். ஆகையால்,

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_{i0}\, g_i(X_0) = 0$$

ஒவ்வொரு i-க்கும் $\pi_{i0} > 0$, $g_i(X_0) < 0$ என்பதால்

$$\pi_{i0}\, g_i(X_0) = 0.\ i = 1, 2, \ldots, m$$

எனவே, ஒவ்வொரு i-க்கும் π_{i0} அல்லது $g_i(X_0)$ அல்லது இரண்டுமே பூச்சியமாக வேண்டும்.

இனி, (1.22)-ன் இரண்டாவது சமனின்மையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதிலிருந்து $\sum_{i=1}^{m} \pi_{i0}\, g_i(X_0) = 0$ என்பதால் அனைத்து $X > 0$-க்கும்

$$f(X_0) < f(X) + \sum_{i=4}^{m} \pi_{i0}\, g_i(X)$$

என்னும் சமனின்மை கிடைக்கிறது. $\pi_0 > 0$ என்பதால்-$g_i(X) < 0$ என்றுள்ள அனைத்து $X > 0$-க்கும்

$$f(X_0) < f(X)$$

என்பது உண்மையாகும். $g_i(X_0) < 0$ என்பது முன்னரே நிரூபிக்கப்பட்டு விட்டதால் குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கு X_0 ஒரு தீர்வு என்பது தெளிவாகிறது.

இப்பொழுது குவிநெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினைக்கும் தீர்வைக் கொடுக்கிறது என நிரூபிக்கிறோம். இதற்குப் பின்வரும் கூடுதலானக் கட்டுப்பாட்டை எடுத்துக் கொள்கிறோம். 'கட்டுப்பாடுகள் (1.19)-ல் அனைத்து i-க்கும் $g_i(X) < 0$ என்னுமாறு ஒரு $X > 0$-ஆவது உள்ளது.' $g_i(X)$ எல்லாம் நேரியச் சார்புகள் ஆயின் இந்தக் கூடுதலான கட்டுப் பாடு தேவையில்லை. குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் ஒரு தீர்வு X_0 என்க. (X_0, π_0) சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினையின் தீர்வு ஆகுமாறு $\pi_0 > 0$-ஐக் காண முடியும் என நிரூபிக்க வேண்டும். K_1, K_2 என்னும் கணங்களை E^{m+1} வெளியில் பின் வருமாறு வரையறுக்கிறோம்:

$K_1 = \{Y : Y = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in E^{m+1}; f(X) < y_0$; குறைந்தது ஒரு $X > 0$-க்காவது அனைத்து $i = 1, 2, \ldots, m$-க்கும் $g_i(X) < y_i$

$$K_2 = \{Y : Y = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in E^{m+1}; f(X_0) > y_0;\}$$
அனைத்து $i = 1, 2, \ldots, m$-க்கும் $0 > y_i\}$

$f(X)$-ம் எல்லா $g_i(X)$-ம் குவிச்சார்புகள் என்பதால் K_1 ஒரு குவிகணமாகும். மேலும் E^{m+1}—ன் திறந்த உட்கணம் (open subset) K_2 முதன்மைதளங்களுக்கு (Principal planes) இணையான தளங்களால் அடைபட்டு) இருப்பதால் குவிகணம் ஆகும். அனைத்து $X \geqslant 0$-க்கும் $f(X)$-ஐ X_0 மீச்சிறுமப்படுத்துவதால் K_1, K_2 க்களின் இடைவெட்டு (intersection) வெற்றுக்கணமாகும்.

எனவே, பிரிக்கும் அதிபரதளத் தேற்றத்திலிருந்து [(§ 1.8) தேற்றம் (1.9)] $a \neq 0$ என்ற வெக்டரையும் b என்ற மாறிலியையும் K_1, K_2 என்ற குவிகணங்களை $a.Y=b$ என்றும் அதிபரதளம் பிரிக்குமாறு காணலாம். அதாவது, அனைத்து $Y^{(1)} \in K_1$ $Y^{(2)} \in K_2$ க்கும்

$$a.Y^{(1)} \geqslant a.Y^{(2)} \tag{1.24}$$

என்பது உண்மையாகுமாறு வெக்டர் a காணப்படக்கூடும். $Y^{(2)}$-ன் கூறுகள் (components) எத்துணை வேண்டுமானாலும் சிறிதாக்கப் படலாம் என்பதால் $a \geqslant 0$ ஆகவேண்டும். மாறுக, a-ன் ஏதாவதொரு கூறு $a_i < 0$ என்றால் $Y^{(2)}$—ன் ஒத்தகூறு விருப்பப்படி சிறிதாக்கப்பட்டு பிரிக்கும் அதிபரதளத்திற்கான சமனின்மை (1.24)-க்கு முரண்பாடு காணலாம்.

$$Y^{(1)} = [f(X), g_1(X), \ldots g_m(X)]$$
$$Y^{(2)} = [f(X_0), 0 \quad , \ldots, \quad 0]$$

என்று எழுதிக் கொண்டால், (1.22) K_2-ன் வரம்புப் புள்ளிகளால் நிறைவு செய்யப்படுவதால் அனைத்து $X \geqslant 0$-க்கும்

$$a_0 f(X) + a_1 g_1(X) \ldots\ldots + a_m g_m(X) \geqslant a_0 f(X_0) \tag{1.25}$$

என்று கிடைக்கிறது.

சமனின்மை (1.25)-ல் $a_0 = 0$ என எடுத்துக் கொண்டால் அது,

$$a_1 g_1(X) + a_2 g_2(X) + \ldots + a_m g_m(X) \geqslant 0 \tag{1.26}$$

என்று மாறுகிறது. இங்கு எல்லா $a_i \geqslant 0$, ஒரு a_i-ஆவது பூச்சியமல்ல என்று இருக்கவேண்டும். நாம் எடுத்துக் கொண்டக் கூடுதலானக் கட்டுப் பாட்டின்படி ஒரு $X \geqslant 0$ ஆவது எல்லா $g_i(X)$-ம் < 0 என்னுமாறு இருக்கும். இதை $\overline{X}$ என வைப்போம். எனவே, $\overline{X} \geqslant 0$, $g_i(\overline{X}) < 0$, $i = 1, 2, \ldots m$. இனி $X = \overline{X}$ என (1.26)-ன் இடதுபுறத்தில் ஈடு செய்தால்,

$$a_1 g_1(\overline{X}) + a_2 g_2(\overline{X}) + \dots + a_m g_m(\overline{X})$$

என்ருகும். ஆனுல் இதன் மதிப்பு < 0 ஆகும். [எல்லா $g_i(\overline{X})$-ம் < 0 என்றும், எல்லா $a_i \geqslant 0$, ஒரு a_i-ஆவது பூச்சியம் அல்ல என்பதைப் பயன் படுத்தியுள்ளோம்.] இது சமனின்மை (1.26)க்கு முரணுயிற்று. எனவே $a_0 = 0$ என்ற நமது எடுகோள் (assumption) தவருனது ஆகும். அதாவது $a_0 \neq 0$ ஆகையால் $a_0 > 0$

சமனின்மை (1.25)-ன் இருபுறங்களையும் a_0-ஆல் வகுத்து $\pi_{i0} = a_i/a_0 \geqslant 0$ என்று எழுதினுல்,

$$f(X) + \pi_{10} g_1(X) + \pi_{20} g_2(X) + \dots + \pi_{m0} g_m(X) \geqslant f(X_0) \qquad (1.27)$$

என்னும் சமனின்மை கிடைக்கிறது. நமது குறியீட்டில் இதையே

$$F(X, \pi_0) \geqslant f(X_0) \qquad (1.28)$$

என்று எழுதுகிறோம். இச்சமனின்மை அனைத்து $X \geqslant 0$-க்கும் உண்மையாகும். இதில் $X = X_0$ என ஈடு செய்தால்,

$$F(X_0, \pi_0) = f(X_0) + \sum_{1=i}^{m} \pi_{i0} g_i(X_0) \geqslant f(X_0)$$

அல்லது

$$\pi_{10} g_1(X_0) + \pi_{20} g_2(X_0) + \dots + \pi_{m0} g_m(X_0) \geqslant 0$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆனுல் $g_i(X_0) \leqslant 0$, $\pi_{i0} \geqslant 0$ $(i = 1, 2 \dots, m)$ என்பதால்

$$\pi_{10} g_1(X_0) + \pi_{20} g_2(X_0) + \dots + \pi_{m0} g_m(X_0) = 0$$

அதாவது,

$$F(X_0, \pi_0) = f(X_0) \qquad (1.29)$$

ஆகிறது. தவிரவும், எல்லா $\pi \geqslant 0$-க்கும், $g_i(X_0) \leqslant 0$ என்பதால்,

$$f(X_0) \geqslant f(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(X_0) = F(X_0, \pi) \qquad (1.30)$$

என்று கிடைக்கிறது.

சமனின்மைகள் (1.28), (1.30) இரண்டையும் ஒருங்கே

$$F(X_0, \pi) \leqslant f(X_0) = F(X_0, \pi_0)$$
$$= f(X_0) \leqslant F(X, \pi_0)$$

அல்லது,

$$F(X_0, \pi) \leqslant F(X_0, \pi_0) \leqslant F(X, \pi_0)$$

என்று எழுதலாம். தேற்றத்தின் நிரூபணம் நிறைவுபெற்றது. தேற்றம் (1.10)-ஐ பின்வரும் அமைப்பிலும் எழுதலாம்:

தேற்றம் (1.11): (சேணப்புள்ளி, குவிநெறிப்படுத்தும் பிரச்சிஃன களின் சமத்துவம்). E^n—ன் குவிகணம் $\{X: X > 0\}$ -இல் $f(X)$, $g_i(X)$, $i = 1,2, \ \ , m$, குவிச்சார்புகள். $\overline{X}$ என்னும் வெக்டர் $\overline{X} > 0$ எல்லா i-க்கும் $g_i(\overline{X}) < 0$ என்றவாறு உள்ளது. $X > 0$, $g_i(X) < 0\ (i = 1, 2, \ldots m)$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க X_0 ல் $f(X)$ தன் மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்றால் $\pi_0 > 0$ என்ற m கூறுகள் கொண்ட வெக்டரை,

$$F(X, \pi) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(X)$$

என்ற சார்பு அனைத்து $X > 0$; $\pi > 0$-க்கும்,

$$F(X_0 \pi) < F(X_0, \pi_0) \leqslant F(X, \pi_0) \tag{1-31}$$

என்பதும்

$$\sum_{l=1}^{m} \pi_{l_0} g_l(X_0) = 0$$

என்பதும் உண்மையாகுமாறு காணலாம்.

மறுதலையாக, $X > 0$; $g_i(X) < 0\ (i = 1, 2,, \ldots m)$ என்றவாறுள்ள அனைத்து X-க்கும் (X_0, π_0) சமனின்மைகள்(1 1) -ஐ நிறைவு செய்யும்போது, $f(X)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு X_0-ல் ஏற்கப் படும்.

$f(X)$-ம் அனைத்து $g_i(X)$-களும் தொடர்ச்சி பெற்ற, வகைக்கத் தகுந்த, குவிச்சார்புகள் என்றால் சேணப் புள்ளிக்கான சமனின் மைகள் குவிநெறிப்படுத்தும் பிரச்சிஃனக்குத் தீர்வு காணத் தேவை யானதும் போதுமானதுமான ஒரு சில கட்டுப்பாடுகளாக உருப் பெறுகின்றன. இவற்றை அடுத்துவரும் தேற்றத்தில் விளக்குகிறோம்.

தேற்றம் (1·12) (கூஹன்—டக்கர் கட்டுப்பாடுகள்).

$$X > 0;\ f(X),\ g_i(X),\ i = 1,2, \ldots m$$

என்பன தொடர்ச்சிபெற்ற, வகைக்கத் தகுந்த, குவிச் சார்புகள்;

$$F(X, \pi) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i g_i(X)$$

என்றால், $X_0 \geqslant 0$, $\pi_0 \geqslant 0$ சேணப் புள்ளிப் பிரச்சிஃனயின் தீர்வு ஆவதற்கு, அதாவது, அனைத்து $X \geqslant 0$, $\pi \geqslant 0$-க்கும்

$$F(X_0, \pi) \leqslant F(X_0, \pi_0) < F(X, \pi_0)$$

என்றிருப்பதற்கு, தேவையானதும், போதுமானதுமான கட்டுப்பாடுகள் வருமாறு:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(X_0, \pi_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \pi_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X_0) \geqslant 0 \qquad (1.32)$$

$$(X_0)' \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X_0, \pi_0)\right] = \sum_{j=1}^{n} x_{j0} \left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \pi_{i0} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X_0)\right\} = 0 \qquad (1.33)$$

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \geqslant 0 \qquad (1.34)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \pi_i}(X_0, \pi_0) = g_i (X_0) \leqslant 0 \qquad (1.35)$$

$$\pi_0 \left[\frac{\partial F}{\partial \pi}(X_0, \pi_0)\right] = \sum_{i=1}^{m} \pi_{i0}\, g_i (X_0) = 0 \qquad (1.36)$$

$$\pi_0 = (\pi_{10}, \pi_{20}, \ldots, \pi_{m0}) \geqslant 0 \qquad (1.37)$$

குறிப்பு: (1.32), (1.34)-களிலிருந்து (1.33)-ல் நடுவில் உள்ள தொடரின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் பூச்சியம் எனத் தெரிகிறது. அதாவது,

$$x_{j0} \left\{\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \pi_{i0} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X_0)\right\} = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots n$$

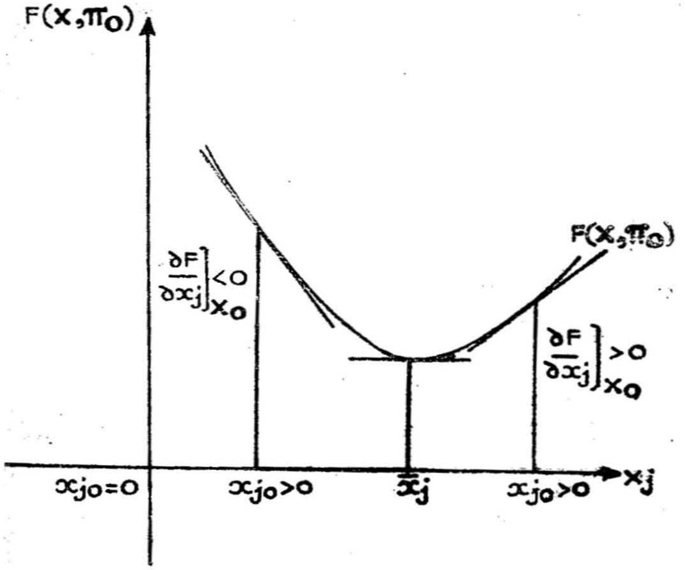
ஆகும். இம்மாதிரியே (1.35), (1.37)-களிலிருந்து,

$$\pi_{i0}\, g_i (X_0) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

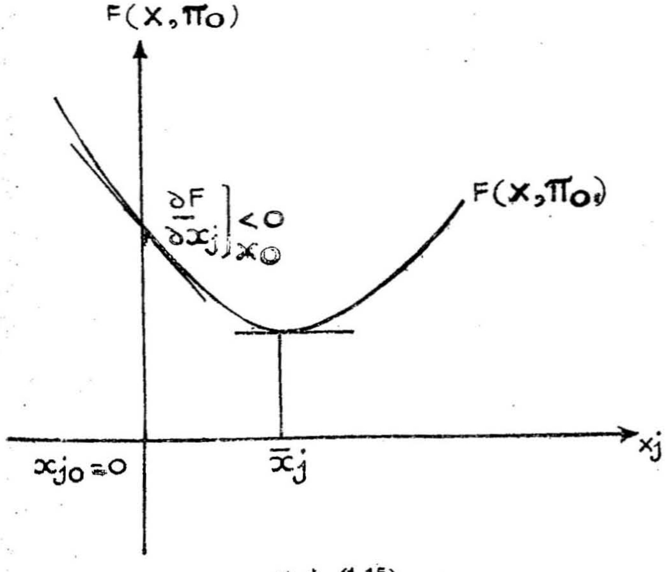
என்றும் கிடைக்கிறது.

நிறுவல்: முதற்கண் தேற்றத்தின் கட்டுப்பாடுகள் தேவையானவையே என நிரூபிக்கலாம். (X_0, π_0)சேணப் புள்ளி பிரச்சினையின் தீர்வு என்க. $X_0 \geqslant 0$ என்னும்போது (1.32),(1.33) இரண்டும் உண்மையல்ல என்போம். π-ஐ π_0 என்ற மதிப்பில் நிலைப்படுத்தினுல் $F(X, \pi_0)$ என்பது X-ல் குவிச் சார்பு ஆகும். ஏதாவதொரு $X_{j0} > 0$ (அதாவது X_0 அகப்புள்ளி) என்றும்,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(X_0, \pi_0) \neq 0$$



படம் (1.14)



படம் (1.15)

என்றும் இருந்தால் $F(X_0, \pi_0)$–ன் மதிப்பை விடக்குறைந்த மதிப்பை $F(X, \pi_0)$-க்கு $X = \overline{X}$ என்ற வெக்டருக்குப் பெறலாம். இதே போன்று $x_{j_0} = 0$ (X_0 வரம்புப் புள்ளி) என்றும்

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(X_0, \pi_0) < 0$$

என்றும் இருந்தாலும் $\overline{X} > 0$— ஐ $F(\overline{X}, \pi_0) < F(X_0 \pi_0)$ என்னுமாறு காணலாம். [படங்கள் (1.14) (1.15) பார்க்கவும்]. ஆனால் அனைத்து $X \geqslant 0$-க்கும் $F \quad (X_0, \pi_0) \leqslant F(X, \pi_0)$ என்பதால் $F(\overline{X}, \pi_0) \nless F(X_0, \pi_0)$. இந்த முரண்பாட்டிலிருந்து நமது எடுகோள் **(1.34)** உண்மை என்னும் போது **(1.32)**, **(1.33)**, என்பன உண்மையல்ல என்பது தவறு எனத் தெரிகிறது. ஆகையால் **(1.32)**, **(1.33)**, **(1.34)** ஆகிய கட்டுப்பாடுகள் யாவும் உண்மையே.

இம் மாதிரியே, X–ன் மதிப்பை X_0 என்ற புள்ளியில் நிலைப் படுத்தினால் $F(X_0, \pi)$ என்பது π_i–களில் நேரியச் சார்பு ஆகும். எனவே அனைத்து $\pi \geqslant 0$–க்கும்,

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i \, g_i \, (X_0) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \pi_{i_0} \, g_i \, (X_0) \qquad (1.38)$$

என்று கிடைக்கிறது. தவிரவும்,

$$\frac{\partial F}{\partial \pi}(X_0, \pi_0) > 0$$

என்றால்

$$\frac{F\partial}{\partial \pi_i}(X_0, \pi_0) = g_i \, (X_0)$$

என்பதால் $g_i \ (X_0) > 0$ எனக் கிடைக்கும். எனவே, **(1.38)**-ல் இருந்து ஏதாவதொரு $g_i(X_0) > 0$ என்றால் π_i-யை மிகப் பெரிய எண்ணாக எடுத்துக்கொண்டு இந்த கட்டுபாட்டிற்கு முரண்பாடு காணமுடியும். எனவே,

$$\frac{\partial F}{\partial \pi_i} \ (X_0, \pi_0) = g_i(X_0) < 0$$

நாம் முன்னரே,

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_{i_0} \ g_i \ (X_0) = 0$$

என நிருபித்தோம். [தேற்றம் (1.10)-ஐப் பார்க்கவும்.] $\pi_0 \geqslant 0$ என்பது தெளிவு. எனவே, கட்டுப்பாடுகள் **(1.35)**, **(1.36)**, **(1.37)** மூன்றும் நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டன.

இனி (1.32) தொடக்கம் (1.37) வரையிலான கட்டுப்பாடுகள் போதுமானவை என நிருபிப்போம். $F(X, \pi_0)$ குவிச்சார்பு என்ப தாலும் தேற்றம் (1.7)-இலிருந்தும்

$$F(X,\pi_0) \geqslant F(X_0,\pi_0) + (X-X_0)' \left[\frac{\partial F}{\partial X} (X_0, \pi_0) \right]$$

அல்லது

$$F(X,\pi_0) \geqslant F(X_0, \pi_0) + X' \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X_0,\pi_0) \right] - (X_0)' \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X_0,\pi_0) \right] \qquad (1.39)$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆனுல் (1.33) இலிருந்து (1.39)-ன் கடைசி உறுப்பு பூச்சியமாகும் என்று தெரிகிறது. $X \geqslant 0$ என்பதால் (1.32) இலிருந்து (1.39)-ன் வலப்புறத்தின் நடுவுறுப்பு குறையல் லாதது என்று தெரிகிறது. ஆகையால் $F(X, \pi_0) \geqslant F(X_0 \; \pi_0)$. தவிரவும், $F(X_0 \; \pi)$, π-ல் நேரிய (எனவே, குவி) சார்பு என்பதால்

$$F(X_0,\pi) = F(X_0,\pi_0) + (\pi-\pi_0)\left[\frac{\partial F}{\partial \pi}(X_0,\pi_0) \right]$$

அல்லது

$$F(X_0\pi) = F(X_0,\pi_0) + \pi \left[\frac{\partial F}{\partial \pi}(X_0, \pi_0) \right] - \pi_0 \left[\frac{\partial F}{\partial \pi} (X_0,\pi_0) \right] \qquad (1.40)$$

என்று கிடைக்கிறது. (1.35), (1.36)-களிலிருந்து $\pi \geqslant 0$ என்னும் போது (1.40)-ன் வலப்புறத்தின் கடைசியுறுப்பு பூச்சியம் என்றும் நடுவுறுப்பு மிகையல்லவென்றும், எனவே, $F(X_0, \; \pi) \leqslant F(X_0, \pi_0)$ என்றும் அறிகிறோம். ஆகையால் $X_0 \geqslant 0$, $\pi_0 \geqslant 0$ என்பன

$$F(X_0, \pi) \leqslant F(X_0, \pi_0) \leqslant F(X, \pi_0)$$

என்றவாறு உள்ளன; அதாவது அவை சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினை யின் தீர்வுக்கான கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன.

தேற்றத்தின் நிரூபணம் நிறைவு பெற்றது.

எடுத்துக் காட்டு; (Dorn, W. S. A Duality Theorem for Convex Programs. I B M Journal of Research and Development. vol 4 no 4, October 1960) $f(x_1, x_2) = -\log(x_1 x_2)$ என்னும் சார்பின்

மீச்சிறு மதிப்பை $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1+x_2-2 \leqslant 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க.

$$F(X, \pi) = F(x_1, x_2 \,;\, \pi)$$
$$= -\log x_1 - \log x_2 + \pi\,(x_1+x_2-2)$$

என்று எடுத்துக் கொண்டால் கூஹ்ன்—டக்கர் கட்டுப்பாடுகளை தீர்வு வெக்டர்கள் $X_0 = (x_{10}, x_{20})$; $\pi_0 = (\pi_{10})$ மூலமாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$-\frac{1}{x_{10}}+\pi_{10} \geqslant 0;\ -\frac{1}{x_{20}}+\pi_{10} \geqslant 0$$

$$x_{10}\left[-\frac{1}{x_{10}}+\pi_{10}\right]+x_{20}\left[-\frac{1}{x_{20}}+\pi_{10}\right]=0$$

$$x_{10} \geqslant 0 \;;\; x_{20} \geqslant 0$$
$$x_{10}+x_{20}-2 \leqslant 0$$
$$\pi_{10}\,(x_{10}+x_{20}-2)=0$$
$$\pi_{10} \geqslant 0$$

எனவே, $x_{10}=x_{20}=1=\pi_{10}$ எனக் கிடைக்கின்றன. அதாவது பிரச்சினைக்கானத் தீர்வு வெக்டர்

$$X_0=(1,1);\ \pi_0=(1)$$

ஆகும். மேலும் $f(X)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு பூச்சியம் ஆகிறது.

பயிற்சிகள்—பாடம்-1

(1.1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

என்ற அணிகளுக்கு $A+B$-ஐக் கணக்கிடுக. AB, BA இரண்டும் இவ்வணிகளுக்குக் காண முடியுமா? காரணம் தருக.

(1.2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc \neq 0$ என்றால்

B என்ற அணியை $AB= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

என்று ஆகுமாறு காண்க.

(1.3) பின்வரும் அணி A-ன் தன்மாற்று A^{-1}.-ஐக் கணக்கிடுக.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 & 3 \\ 2 & 19 & 27 & 8 \\ 0 & 12 & 17 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(1.4) A, B இரண்டும் சமச்சீர் அணிகள்

(*i*) $AB + BA$ சமச்சீர் அணி

(*ii*) $AB - BA$ எதிர்ச்சீர் அணி

என்று நிறுவுக.

(1.5) A சதுர அணி என்றால் பின் வரும் கூற்றுகள் உண்மையாகும் என நிரூபிக்க:

(*i*) $A + A'$ சமச்சீர் அணி.

(*ii*) $A - A'$ எதிர்ச்சீர் அணி

(*iii*) AA' சமச்சீர்அணி

(1.6) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 3 \\ 0 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ என்பது

ஒருமையணி என்றால் λ-ன் மதிப்புக் காண்க.

(1.7) வரைபடத்தில் $X=(4,6)$ $Y=(7, 8)$ என்ற வெக்டர்களைக் குறித்து $X+Y, X-Y$ என்பவற்றை வரையறையிலிருந்து காண்க.

(1.8) சென்ற பயிற்சியில் உள்ளது போன்று X, Y-களை எடுத்துக் கொண்டு $3X+4Y$, $7X-3Y$ ஆகியவற்றின் உட்பெருக்கலைக் கணக்கிடுக.

(1.9) பின்வரும் வெக்டர்கள் ஒரு படிச் சார்ந்தவையா, சாராதவையா என்பதைக் காண்க:

(*i*) E^3-ல் (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)

(*ii*) E^3-ல் (1, 1, 4), (3, 2, 1,). (4, 3, 5)

(*iii*) E^2-ல் (7, 2), (8, 3), (−1, 4)

(*iv*) E^2-ல் (3, 4), (4, 3), (5, 2)

(1.10) இரு பரிமாண யூக்ளிடின் வெளியில் $-2x_1+5x_2-10=0$ என்ற கோடு தளத்தை இரு அரை வெளிகளாகப் பிரிக்கிறது என்பதை படம் வரைந்து காண்க. $-2x_1+5x_2-10$ மிகையாக இருக்கும் புள்ளிகளின் கணம் இந்த அரை வெளிகளில் எது என்பதை அம்புக்குறியிட்டுக் காட்டவும்.

(1.11) படம் (1.7)ல் குவி கணங்கள் எவை என்பதையும் குவி கணங்கள் அல்லாதவை எவை என்பதையும் வகைப் பிரித்துக் காட்டுக.

(1.12) பயிற்சி (1.7)-ல் கொடுக்கப்பட்ட X, Y-களின் குவிச் சேர்க்கைகளின் பொது உரு என்ன?

(1.13) E^2-வெளியில் ஓரலகு ஆயவெட்டுத் துண்டுகளைப் பெற்ற சிம்ப்ளக்ஸின் சமன்பாடுகளை எழுதி அதை வரை படத்தில் காட்டுக. இந்த சிம்ப்ளக்ஸ் எத்தனை "முகங்களைப் பெற்றுள்ளது?" அவை யாவை ?

(1.14) பின்வரும் சமனின்மைகளை நிறைவு செய்கின்ற புள்ளிகள் அமையும் பிரதேசத்தை வடிவ கணித முறையில் தீர்மானிக்கவும்:

$$x_1 > 0;\ x_2 > 0$$
$$x_1 + 2x_2 < 4$$
$$5x_1 + 4x_2 < 10$$
$$3x_1 + x_2 < 5$$

(§1.4)-ன் இறுதியில் கண்டவாறு முயன்று மேற்கூறியக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$4x_1+5x_2$-ன்

மீப்பெருமதிப்பு என்ன வென்றும் அது எப்புள்ளியில் ஏற்கப்படுகிறது என்பதையும் காண்க.

(1.15) ஜோர்டான்-கௌஸ் முழுநீக்க முறைப்படி பின்வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து x_1, x_2, x_3-க்களின் ஒருங்கமைத் தீர்வு காண்க:

$$7x_1-3x_2-x_3=10$$
$$x_1+2x_2+x_3=24$$
$$3x_1-4x_2+2x_3=5$$

கெழுக்கள் அணியின் தன்மாற்றைக் கண்டு இத்தீர்வினைச் சரிபார்க்கவும்.

(1.16) பின்வரும் இருபடி அமைப்புகள் குறை அல்லது மிகை உறுதியானவையா அல்லது அரையுறுதியானவையா என்பதைத் தீர்மானிக்கவும் :

(i) $2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$

(ii) $-x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2$

(iii) $x_1^2+7x_1x_2+x_3^2+4x_2\,x_3$

(iv) $x_1^2+x_2^2+9x_3^2-6x_1\,x_3-6x_2x_3\;+2x_1x_2$

(1.17) பயிற்சி (1.16)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடி அமைப்புகளை $X^l\,C\,X$, (C ஒருசமச்சீர் அணி) என்றவாறு எழுத C—ஐக் காண்க.

(1.18) பின்வரும் சார்புகள் குவிச்சார்புகளா என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்:

(i) $(x-1)^3$, $(1\leqslant x<\infty)$

(ii) e^{4x} , (x மெய் எண்)

(iii) $\log x$, $(0<x<\infty)$

(iv) e^{-x^2} , $(0\leqslant x<\infty)$

(v) $|x|$, (x மெய் எண்)

(1.19) பின்வரும் குவிநெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான கூஹ்ன்—டக்கர் கட்டுப்பாடுகளை எழுதுக:

$$a_1\,e^{-b_1x_1}+a_2\,e^{-b_2x_2}\text{ -ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்பை

$$\begin{aligned} x_1+x_2-1 &\leqslant 0\\ x_1 &\geqslant 0\\ x_2 &\geqslant 0\end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க, (இங்கு a_1, a_2, b_1, b_2 என்பன குறையல்லா மாறிலிகள்.) [Carr, C.R. and C.W. Howe, Quantitative Decision Procedures in Management and Economics, Mc Graw Hill Book Company (1964)].

(1.20) $X^1\,C\,X$ மிகை யரையுறுதியானது என்றால் $X^1CX=0$ என்பது $CX=0$ என்பதைப் புலப்படுத்தும் என்று நிரூபிக்கவும்.

2. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை-பொதுவுரு

(Linear Programming Problem-The General Form)

2.1 நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் வரையறை:

$x_1, x_2 \ldots, x_n$ என்னும் n மாறிகள் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன என்க:

$$x_j > 0, \; j = 1, 2, \ldots\ldots n \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \quad \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n = b_i \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

இக் கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n \tag{2.3}$$

என்னும் நேரிய வமைப்பு [இதைக் குறிக்கோள் சார்பு (Objective Function) என்கிறோம். (§1.4)-ஐப்பார்க்கவும்.] மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுமாறு n-பரிமாண வெக்டர் வெளி E^n-ல் $(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots x_n)$ என்ற வெக்டரைக் கண்டறிவதே நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் பொதுவுரு ஆகும்.

இங்கு a_{ij}, b_i, c_j $(i=1, 2, \ldots, m; j=1,2,\ldots,n)$ என்பன கொடுக்கப் பட்ட மாறிலிகள், $m < n$ என்றும் கொள்கிறோம். சமன்பாடுகள் (2.2)-ல், தேவையானல்(—1)ஆல் பெருக்கி, எல்லா b_i-களும் குறையல்லா எண்கள் எனக் கொள்கிறோம்.

பற்பலக் குறியீடுகள் வழக்கில் உள்ளன. நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையையும் இக் குறியீடுகளுக்கு ஏற்ப பலவிதங்களில் எழுதலாம். அவற்றுள் சில வருமாறு :

(i) $x_j > 0, \quad j=1, 2, \ldots\ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1, 2, \ldots m$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ -ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்பு காண்க.

(ii) $X > O$; $AX = b$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க CX-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க. இங்கு,

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ஒரு நிரை வெக்டர்,
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ஒரு நிரல் வெக்டர்,
$A = (a_{ij})$ ஒரு $m \times n$ அணி,
$b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ஒரு நிரல் வெக்டர்.
$O = n$- பரிமாண பூச்சிய நிரல் வெக்டர்.

(iii) $X > O$, $x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க CX ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு $C = (c_1, c_2, \ldots c_n)$ ஒரு நிரை வெக்டர்.
$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ஒரு நிரல் வெக்டர்;
$A = (a_{ij})$ ஒரு $m \times n$ அணி,
$P_j =$ அணி A-ன் j வது நிரல் வெக்டர்
$j = 1, 2, \ldots, n$,
$P_0 = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ ஒரு நிரல் வெக்டர்,
$O = n$- பரிமாண பூச்சிய நிரல் வெக்டர்

குறிப்பு: சில பிரச்சினைகளில் குறிக்கோள் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பைக் கொடுக்கும் தீர்வு தேவைப்படலாம். அந்நிலைகளில் $-CX$-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம். $-CX$-க்கு மீச்சிறு மதிப்புக் கொடுக்கும் தீர்வு CX-க்கு மீப் பெரு மதிப்பைத்தருகிறது என்பது தெளிவு.

2.2 நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வின் சில பண்புகள் :

முதற்கண் சில வரையறைகளைத் தருகிறோம்.

வரையறை: கட்டுப்பாடுகள் (2.1), (2.2) -களை நிறைவு செய்கின்ற $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ என்ற வெக்டரை நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் **செய்தக்க** (Feasible) **தீர்வு** என்கிறோம்.

வரையறை : சமன்பாடுகள் (2.2)-ல் ஏதாவது $n-m$ மாறிகளை பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்து எஞ்சிய m மாறிகளுக்குக் காணப்படும் **தீர்வு ஓர் அடிப்படைத் தீர்வு** (Basic Solution) எனப்படும். (இங்கு

இந்த m மாறிகளின் குணகங்கள் அமைக்கும் அணிகோவை பூச்சியம் அல்ல என்று கொள்கிறோம்.) அடிப்படைத் தீர்வுக்கான மாறிகளை அடிப்படை மாறிகள் (Basic Variables) என்கிறோம்.

வரையறை: கட்டுப்பாடுகள் (2.1)-களையும் நிறைவு செய்கின்ற அடிப்படைத் தீர்வு செய்தக்க அடிப்படை தீர்வு எனப்படும். எனவே, செய்தக்க அடிப்படை தீர்வுக்கான மாறிகள் யாவும் குறையல்லாதவை (Non-negative).

வரையறை: சரியாக m மிகை x_i-களைக் கொண்ட செய்தக்க அடிப்படைத் தீர்வு கேடுறு செய்தக்க அடிப்படைத்தீர்வு (Non-degenerate basic feasible solution) எனப்படும். எனவே, இத்தீர்விற்கான எல்லா அடிப்படை மாறிகளும் மிகை எண்களே; அவற்றுள் ஒன்று கூட பூச்சியமல்ல.

வரையறை: குறிக்கோள் சார்பு (2.3)-ஐ மீச்சிறுமப்படுத்தும் செய்தக்க தீர்வு மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு எனப்படும்.

மாறாக வெளிப்படையாகக் கூறாதவிடத்து, இனி பிரச்சினையின் தீர்வு என்றால் செய்தக்க தீர்வு என்றே கொள்ளல் வேண்டும்.

வரையறை: n-பரிமாண வெக்டர்வெளி E^n-ல் உள்ள U, V என்ற வெக்டர்கள் அனைத்துக்கும் α, β என்னும் அனைத்து திசையிலிகளுக்கும் $X = \alpha U + \beta V$ என்ற வெக்டர்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இம்மாதிரி வரையறுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு X-க்கும் f என்னும் மெய்மதிப்புச் சார்பு

$$f(X) = f(\alpha U + \beta V) = \alpha f(U) + \beta f(V) \tag{2.4}$$

என்றிருக்குமாறு அமைந்தால் f-ஐ நேரியச் சார்பலன் (Linear functional) என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக முப்பரிமாண வெக்டர்வெளி E^3-ல் அனைத்து

$X = (x_1, x_2, x_3)$-க்கும்

$f(X) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ (a, b, c மெய் எண்கள்) என்றால் f நேரியச் சார்பலன் ஆகும். ஏனென்றால் எந்த முப்பரிமாண வெக்டர்கள் U, V-க்களை $X = \alpha U + \beta V$ என்று எடுத்துக்கொண்டாலும் அனைத்து திசையிலிகள் α, β-க்கும் (2.4) உண்மையாகும்.

குறிக்கோள் சார்பு (2.3), கட்டுப்பாடுகள் (2.1), (2.2) — களை நிறைவு செய்கின்ற எல்லா வெக்டர்கள் X-ஐப் பொறுத்தும் ஒரு நேரியச் சார்பலன் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

அடுத்து வரும் தேற்றத்தில் செய்தக்க தீர்வுகள் கணத்தின் ஒரு முக்கியப் பண்பு கூறப்படுகிறது.

தேற்றம் (2.1): நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான தீர்வுகள் அனைத்தும் ஒரு குவிகணத்தையமைக்கும்.

நிறுவல்: தீர்வுக்கணம் ஒருறுப்புக் கணம் எனின் தேற்றத்தின் கூற்று தெளிவானதே. எனவே, குறைந்தது இரண்டு தீர்வுகள் X_1, X_2 ஆவது இருக்கின்றன என்று கொள்வோம். எந்தவிரு செய்தக்க தீர்வுகளின் குவிச் சேர்க்கையும் ஒரு செய்தக்க தீர்வு தான் என்று நிறுவுதல் வேண்டும். (§ 1.3 பார்க்கவும்) X_1, X_2 தீர்வுகள் என்பதால்,

$$A X_1 = b \quad , \quad X_1 > O$$
$$A X_2 = b \quad , \quad X_2 > O$$

ஆகும். $0 < \alpha < 1$ என்றால்,

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2$$

என்பது X_1, X_2-க்களின் குவிச் சேர்க்கையாகும். $X > O$ என்பது தெளிவு. மேலும்,

$$\begin{aligned} A X &= A \,[\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2] \\ &= \alpha A X_1 + (1-\alpha) A X_2 \\ &= \alpha b + (1-\alpha) b = b \end{aligned}$$

ஆகையால், X-ம் ஒரு செய்தக்க தீர்வுதான் என்று புலனாகிறது. தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வுகள் அடங்கிய இக் குவிகணத்தை K என்று குறிப்போம். ஒரு சில நேரியக் கட்டுப் பாடுகள் (2.1), (2.2)-களின் இடைவெட்டாக K இருப்பதால், அது வெற்றுக்கணம் அல்ல வென்றால், அதன் வரம்புகள் கட்டுப்பாடுகள் கொடுக்கும் ஒத்த ஒரு சில அதிபர தளங்களின் வெட்டு முகங் களாக (Sections of hyper-planes) அமையும். K யூக்ளிட் வெளி E^n-ன் ஒரு பிரதேசம் (region) ஆகும். இந்தப் பிரதேசம் வெற் றாகவோ, குவிப் பன்முகியாகவோ (Convex Polyhedron) அல்லது ஒரு திசையில் வரம்பற்ற குவிப் பிரதேசமாகவோ இருக்கலாம். K வெற்றுப் பிரதேசமானால் நம் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு கிடையாது. அது குவிப் பன்முகியெனின் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு உண்டு; அதாவது, குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு மீச்சிறு முடிவுள்ள எண்ணாக இருக்குமாறு X-ஐக் காண முடியும். K வரம்பில்லாத கணம் என்றால் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு இருப்பினும் அத்தீர்வு குறிக்கோள்

சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பை முடிவிலி (infinity) ஆக்கலாம். ஒப்புக் கொள்ளக்கூடிய நேரிய நெறிப்படுத்தும் மாதிரிகள் (models) கடைசி இரண்டு வகைகளைச் சார்ந்தவையாகவே இருக்கும். தேற்றம் (2.1)-இலிருந்து ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட தீர்வு இருக்குமானால், உண்மையில், பிரச்சினைக்கு முடிவிலித் தீர்வுகள் உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது. இத் தீர்வுகளிலிருந்து குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பை மீச்சிறியதாக்கும் தீர்வைக் காண்பதே நமது நோக்கமாகும்.

K வெற்றுக் கணமாகவோ அல்லது வரம்பற்றதாகவோ இருப்பதைக் காணும் கணக்கீட்டு முறைகளைப் பற்றி ஆராயக்கூடும் என்றாலும் பிரச்சினையினை எளிதாக்கும் பொருட்டு *K*-யை குவிப் பன்முகிப் பிரதேசம் என்றே நாம் கொள்கிறோம். இந்நிலையில் *K*-ன் கோடிப்புள்ளிகளின் குவியுறை (§ **1.3**-ல் இது வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது) *K*-யே ஆகும்; அதாவது, *K*-ல் உள்ள எந்த செய் தக்க தீர்வும் *K*-ன் கோடிச் செய்தக்க தீர்வுகளின் குவிச் சேர்க்கையாக எழுதப்படக்கூடும். எனவே, மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வைக்காண குவிப்பன்முகி *K*-ன் கோடிப்புள்ளிகளை ஆராய்வது போதுமானதாகும். இது பின்வரும் தேற்றத்தில் நிரூபிக்கப் படுகிறது.

தேற்றம் (2.2): நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான செய்தக்க தீர்வுகளால் பிறப்பிக்கப்படும் குவிகணம் *K*-ன் கோடிப்புள்ளி யொன்றில் குறிக்கோள் சார்பு (2.3) தன் மீச்சிறு மதிப்பை யேற் கிறது. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கோடிப்புள்ளிகளில் அது தன் மீச்சிறு மதிப்பை யேற்குமானால், குறிப்பிட்ட அப்புள்ளிகளின் ஒவ்வொரு குவிச்சேர்க்கையிலும் அதே மதிப்பை அது ஏற்கும்.

நிறுவல்: *K*-ஐக் குவிப் பன்முகி என்று நாம் எடுத்துக் கொள்வதால். அதற்கு ஒரு சில (finite) கோடிப்புள்ளிகளே உண்டு. இக் கோடிப்புள்ளிகளை $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots \overline{X_p}$ என்றும், குறிக் கோள் சார்பு $f(X)$ என்றும், X_0 மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு என்றும் கொள்வோம். *K*-ல் உள்ள எல்லா *X*-களுக்கும், எனவே, $f(X_0) \leq f(X)$ ஆகும். X_0 ஒரு கோடிப்புள்ளி என் றால் தேற்றத்தின் முதற் பகுதி வெளிப்படையாகும். எனவே, அது ஒரு கோடிப்புள்ளி அல்ல என்போம். ஆகவே,

$$X_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{X_i}, \ \alpha_i > 0, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

என எழுதலாம். $f(X)$ நேரியச் சார்பலன் என்பதால்,

$$f(X_0) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{X_i}\right)$$

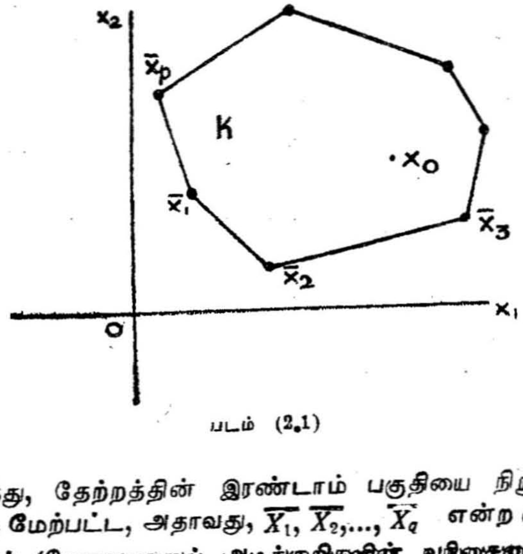
$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\overline{X_i}) = M \qquad (2.5)$$

இங்கு M என்பது அனைத்து $X \in K$-க்கும் $f(X)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $f(X_0)$-க்குச் சமமாகக் கொள்ளப்பட்டது. எல்லா $f(\overline{X_i})$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$-களிலும் மீச்சிறு மதிப்பையுடையது. $f(\overline{X_l})$ என்க. α_i-களுக்கான கட்டுப்பாடுகளிலிருந்தும், (2.5)-இலிருந்தும்,

$$f(X_0) > \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(\overline{X_l}) = f(\overline{X_l})$$

ஆனால் $f(X_0) \leqslant f(X)$, அனைத்து $X \in K$-க்கும் எனக் கொள்ளப்பட்டது. ஆகையால், $f(X_0) = f(\overline{X_l}) = M$

எனவே, குறிக்கோள் சார்பு $f(X)$ தன் மீச்சிறு மதிப்பை கோடிப் புள்ளிகளில் ஒன்றான $\overline{X_l}$-ல் ஏற்கிறது.



படம் (2.1)

அடுத்து, தேற்றத்தின் இரண்டாம் பகுதியை நிறுவுவோம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட, அதாவது, $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_q}$ என்ற q கோடிப் புள்ளிகளில் (தேவையானால் அடிக்குறிகளின் வரிசையை மாற்றி

முதல் q புள்ளிகள் என்று இவற்றை எடுத்துக் கொள்ளக் கூடுமாதலால் நிரூபணத்தின் பொதுமைக்கு ஊறு விளையாது) குறிக்கோள் சார்பு $f(X)$ தன் மீச்சிறு மதிப்பை யேற்கிறது என்றால்,

$$f(\overline{X_1}) = f(\overline{X_2}) = \ldots = f(\overline{X_q}) = M$$

ஆகும். X என்பது இந்த q வெக்டர்களின் ஏதாவதொரு குவிச் சேர்க்கை என்றால் α_i, $(i=1, 2,\ldots q)$ என்ற திசையிலிகளை,

$\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1$ என்னும் போது,

$$X = \alpha_1 \overline{X_1} + \alpha_2 \overline{X_2} + \ldots + \alpha_q \overline{X_q}$$

என்னுமாறு காணலாம். ஆகவே,

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{X_i}\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i f(\overline{X_i}) = M \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = M$$

என்று கிடைக்கிறது. அதாவது X-என்ற புள்ளியிலும் குறிக்கோள் சார்பு தன் மீச்சிறு மதிப்பை யேற்கிறது.

தேற்றத்தின் நிரூபணம் நிறைவு பெற்றது.

குறிப்பு: (1) குறிக்கோள் சார்பு (2.3)-ன் மீப்பெருமதிப்பு காண வேண்டுமானல் வெளிப்படையான (Obvious) சிற்சில மாறுதல்களுடன் இதே மாதிரியான வேறொரு தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்கலாம்.

(2) மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு காண விழையும் போது K-ன் கோடிப்புள்ளிகளில் அதைத் தேடவேண்டும் என்று இத்தேற்றத்திஞல் நாம் அறிகிறோம்.

நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கு $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i > 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ என்பது செய்தக்க தீர்வு என்றால்,

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0$$

என்பது உண்மையாக வேண்டும். (§ 2.1-ஐப் பார்க்கவும்) P_0-க்குச் சமமாக $P_j (j=1, 2, \ldots, n)$ என்ற நிரல்வெக்டருள் தம்முள் ஒருபடிச்சாரா k வெக்டர்களின் ஏதோவொரு குறையல்லாச் சேர்க்கையை எழுதமுடியுமானல் (§1.2-ஐப் பார்க்கவும்) அந்த நிலையில் பின்வரும் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் (2.3): $P_1, P_2, \ldots, P_k$ என்பன தம்முள் ஒருபடிச் சாராதவையாகவும்,

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_k P_k = P_0$$

$(x_1, x_2, \dots x_k \geqslant 0 ; k \leqslant m)$ என்றவாறும் உள்ள நிரல் வெக்டர்கள். என்ருல், $X = (x_1, x_2, \dots x_k, 0, \dots, 0)$ செய்தக்க தீர்வுகளின் குவி கணம் K-ன் கோடிப் புள்ளிகளுள் ஒன்ருகும். (இங்கு X கடைசி $n-k$ மூலகங்கள் பூச்சியமாகவுள்ள n-பரிமாண வெக்டர் ஆகும்.)

நிறுவல்: தேற்றத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டர் X குவி கணம் K-ன் கோடிப் புள்ளிகளுள் ஒன்று அல்ல என்க. இருப் பினும் அது செய்தக்க தீர்வு என்பதால், K-ன் இரு வேறு புள்ளிகள் X_1, X_2—க்களின் குவிச்சேர்க்கையாக அதை எழுதக்கூடும். அதாவது, ஏதோவொரு $0 < \alpha < 1$-க்கு $X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$ என்ருக வேண்டும். X-ன் எல்லா மூலகங்களும் குறையல்லா எண்கள் என்பதாலும் $0 < \alpha < 1$ என்பதாலும் X_1 X_2-க் களின் இறுதி $n-k$ மூலகங்கள் பூச்சியமாக வேண்டும். எனவே,

$$X_1 = \left(x_1^{(1)}, \ x_2^{(1)}, \dots, \ x_k^{(1)}, 0, \dots, 0 \right)$$

$$X_2 = \left(x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)} \dots, \ x_k^{(2)}, 0, \dots, 0 \right)$$

என்று எழுதலாம், மேலும் இவை செய்தக்க தீர்வுகள் என்பதால்,

$$X_1 \geqslant 0 \ ; \quad X_2 \geqslant 0 \ ;$$
$$A X_1 = b = P_0 ; A X_2 = b = P_0$$

என்பன உண்மையாக வேண்டும். ஆகையால்,

$$x_1^{(1)} P_1 + x_2^{(1)} P_2 + \dots + x_k^{(1)} P_k = P_0$$

$$= x_1^{(2)} P_1 + x_2^{(2)} P_2 + \dots + x_k^{(2)} P_k$$

எந்த வெக்டரையும் தம்முள் ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் மூல மாக ஒரேவொரு வழியில்தான் அவற்றின் நேரியச் சேர்க்கையாக எழுதமுடியும். [இது அடிப்படை வெக்டர்களுக்கு §-12-ல் கூறப்பட் டது. தம்முள் ஒருபடிச்சாரா எந்த வெக்டர்களுக்கும் இது உண்மை என்பது எளிதில் நிருபிக்கப்படக்கூடும் (முயற்சி செய்க!)] எனவே, P_0-ஐயும் ஒரேவொரு வழியில்தான் தம்முள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் $P_1, P_2, \dots P_k$-க்களின் நேரியச் சேர்க்கையாக எழுத முடியும். ஆகையால்,

$$x_i = x_i^{(1)} = x_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots k$$

எனவே, தேற்றத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள X-ஐ K-ன் இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளின் குவிச் சேர்க்கையாக எழுத முடியாது. எனவே, வரையறைப்படி (§1.3) K-ன் கோடிப்புள்ளியாக X அமைய வேண்டும்.

தேற்றம் (2.4): $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்பது K-ன் கோடிப் புள்ளி எனின், அதன் மிகை மூலகங்கள் x_i-உடன் தொடர்பு கொண்ட வெக்டர்கள் தம்முள் ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் கணத்தை அமைக்கும். எனவே, உயர்ந்த பட்சம் x_i -களுள் m மூலகங்களே மிகையெண்களாகும். எஞ்சியவை (குறைந்த பட்சம் $n-m$ எண்கள்) பூச்சியம் ஆகும்.

நிறுவல்: K-ன் கோடிப்புள்ளி X-ன் முதல் k மூலகங்கள் பூச்சியம் அல்லாதவை, மிகை எண்கள், என்க. எனவே,

$$P_0 = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_k P_k \qquad (2.6)$$

தேற்றத்தின் முதற்பகுதி முரண்பாட்டு முறையில் (method of reductio-ad-absurdem) நிருபிக்கப்படும். $P_1, P_2, \ldots P_k$ தம்முள் ஒரு படிச்சார்ந்தவை (linearly dependent) என்க. $d_1, d_2, \ldots, d_k$ என்ற மாறிலிகள் குறைந்தது ஒரு d_i-ஆவது பூச்சியமாக இராதவாறும்

$$d_1 P_1 + d_2 P_2 + \ldots + d_k P_k = O \qquad (2.7)$$

என்னுமாறும் காணப்படக்கூடும். தேற்றத்தின் தற்கோளிலிருந்து $P_1, P_2, \ldots, P_k$-க்களின் நேரியச் சேர்க்கையாக P_0-ஐ எழுதலாம் என்பது கூறப்பட்டது. [சமன்பாடு (2.6)], $\lambda > 0$ என்ற எண்ணால் (2.7)-ஐப் பெருக்கி (2.5)-உடன் கூட்டினால்,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i P_i + \lambda \sum_{i=1}^{k} d_i P_i = P_0$$

என்று கிடைக்கிறது. இவ்வாறே, (2.7)-ஐ λ-ஆல் பெருக்கி (2.6)-இலிருந்து கழித்தால்,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i P_i - \lambda \sum_{i=1}^{k} d_i P_i = P_0$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (2.2)-களுக்கு பின்வரும் இரண்டு தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன :

$$X_1 = (x_1 + \lambda d_1, x_2 + \lambda d_2, \ldots, x_k + \lambda d_k, 0, \ldots 0,)$$
$$X_2 = (x_1 - \lambda d_1, x_2 - \lambda d_2, \ldots, x_k - \lambda d_k, 0, \ldots, 0)$$

இத்தீர்வுகள் செய்தக்க தீர்வுகளாக இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை. எல்லா x_i-களும் மிகையெண்களாதலின்: λ-ஐத் தேவைக்கேற்ப அதன் மிகைத்தன்மை கெடாத வகையில் சிறியதாக்கி X_1, X_2-க்களின் முதல் k மூலகங்களும் மிகையாகவே இருக்கும்படிச் செய்யக்கூடும். எனவே, இத்தகு λ-க்கு X_1, X_2 இரண்டும் செய்தக்க தீர்வுகளாகின்றன. ஆனல், $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ என்பதால் X குவிகணம் K-ன் ஒரு கோடிப்புள்ளியாகாது. ஆனல் இது தேற்றத்தின் தற்கோளுக்கு முரணனது. எனவே, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ என்பவை தம்முள் ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்னும் நமது எடுகோள் உண்மையாக இருக்க முடியாது; அதாவது, அவை தம்முள் ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்களே.

m-பரிமாண வெளியில் $(m+1)$ வெக்டர்கள் அமைக்கும் எந்த கணமும் தம்முள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டர்கள் கணம் ஆகும். எனவே, உயர்ந்த பட்சம் x_i-களுள் m எண்கள் தான் மிகையாகும். ஏனெனில், அவ்வாறு இல்லையென்றல் X-ல் $(m+1)$ மிகை மூலகங்கள் இருக்கும்; $P_1, P_2, \ldots, P_m, P_{m+1}$ என்ற $(m+1)$ வெக்டர்களே தம்முள் ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்களாக இத்தேற்றத்தின் முதற்பகுதியின் விளைவாகக் காணலாம். ஆனல் இது உண்மைக்கு புறம்பானது.

தேற்றத்தின் நிரூபணம் நிறைவுபெற்றது.

குறிப்பு: பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாத வகையில் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினேக்கான $P_1, P_2, \ldots P_n$ என்ற வெக்டர்கள் தம்முள் ஒருபடிச்சாரா m வெக்டர்களேப் பெற்றிருக்கும் எனக் கூறலாம். இது வெளிப்படையாகப் புலனுகாத போது, கொடுத்துள்ள வெக்டர்களுடன் தம்முள் ஒரு படிச்சாரா m வெக்டர்களேச் சேர்த்து விரிவுபடுத்தி ஒரு புதுப் பிரச்சினேயை அமைத்து அதற்குத் தீர்வு காணலாம். இந்த முறை பின்னர் விரிவாக விவரிக்கப்படும்.

தேற்றம் (2.5): K-ன் ஒவ்வொரு கோடிப் புள்ளியுடனும் கொடுத்துள்ள $P_1, P_2, \ldots, P_n$, என்ற வெக்டர்களிலிருந்து தம்முள் ஒருபடிச்சாரா m வெக்டர்களேத் தொடர்பு படுத்தக்கூடும்.

நிறுவல்: தேற்றம் (2.4)-ல் இம்மாதிரி $k < m$ என்ற வெக்டர்கள் உண்டு என நிறுவப்பட்டது. இத் தேற்றத்தில் சரியாக m வெக்டர்களே K-ன் ஒவ்வொரு கோடிப்புள்ளியுடனும் தொடர்பு படுத்தலாம் என நிரூபிக்கின்றேம். $k = m$ என்பது உண்மையல்லவென்றல் $k < m$ என்க. சென்ற தேற்றத்தின்படி $P_1, P_2, \ldots, P_k$ என்ற வெக்டர்கள் தம்முள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் ஆகுமாறு காண்போம். $k < m$. மேலும் கூடுதலாக $(r-k)$ வெக்டர்

களைத் தான் $(r < m)$ $P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}, \ldots, P_r$ தம்முள் ஒருபடிச்சாராத் தன்மையைப் பெற்றதாகக் காண முடிகிறது என்றால் எஞ்சிய $(n-r)$ வெக்டர்களும் இந்த r வெக்டர்களைப் பொறுத்து இருக்கும். ஆனால் இது $P_1, P_2, \ldots, P_n$ என்ற n வெக்டர்களிலிருந்து எப்போதும் தம்முள் ஒருபடிச்சாரா m வெக்டர்களைப் பொறுக்கலாம் என்பதற்கு முரணாகும்.

எனவே, K-ன் எந்தப்புள்ளியுடனும் $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்னும் m வெக்டர்களைத் தொடர்பு படுத்தி,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i P_i + \sum_{i=k+1}^{m} O . P_i = P_0$$

என எழுதலாம். தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

இதுவரை கண்ட உண்மைகளைத் தொகுத்துப் பின்வரும் தேற்றத்தை அமைக்கலாம்.

தேற்றம் (2·6) : $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்பது குவிகணம் K-ன் கோடிப் புள்ளியாக விருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானது மான கட்டுப்பாடு

$$P_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j P_j$$

என்ற விரிவில் மிகை x_j-க்களைக் குணகங்களாகப் பெற்ற வெக்டர்கள் P_j தம்முள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் ஆகவேண்டும் என்பதாகும்.

இதுவரை நிரூபிக்கப்பட்ட தேற்றங்களிலிருந்தும் நமது தற்கோள்களிலிருந்தும் சில விஷயங்கள் தெளிவாகின்றன : (i) நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான செய்தக்க தீர்வுகள் அமைக்கும் குவிகணம் K-ன் கோடிப்புள்ளி யொன்றில் குறிக்கோள் சார்பு தன் மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கிறது. (ii) ஒவ்வொரு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வும் ஒரு கோடிப்புள்ளியுடனாவது தொடர்பு பெற்றிருக்கும். (iii) கொடுத்துள்ள n வெக்டர்களுள் ஒருபடிச்சாரா ஏதோ m வெக்டர்களுடன் ஒவ்வொரு கோடிப்புள்ளியும் தொடர்பு பெற்றிருக்கும். எனவே, குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு காண, ஒருபடிச் சாரா m வெக்டர்களால் பிறப்பிக்கப்படும் செய்தக்க தீர்வுகளை ஆராய்தல் வேண்டும். n வெக்டர்

களிலிருந்து m வெக்டர்களை $^{n}C_{m}$ விதங்களில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் என்பதால் ஒரு பிரச்சினைக்கு உயர்ந்தது $^{n}C_{m}$ தீர்வுகளே இருக்க வாய்ப்பு உண்டு. n, m என்பன பெரிய எண்களாக இருக்கும் போது எல்லாத் தீர்வுகளையும் கண்டு அவற்றுள் குறிக்கோள் சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்பைக் கொடுக்கும் தீர்வைக் காண்பது எளிதன்று. முறையாக இத்தீர்வுகள் கணத்தில் இருந்து தேவையான சிறிய உட்கணமொன்றை பொறுக்க நம்பகமான (reliable) கணக்கீட்டு முறை (Algorithm) தேவைப்படுகிறது. டான்ட்சிக் (G. B. Dantzig) என்பவரால் விளக்கப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை (Simplex Procedure) இம்மாதிரி கணக்கீட்டு முறைகளுள் ஒன்று ஆகும். இந்த முறையில் முதலில் ஒரு கோடிப் புள்ளியைக் கண்டு அவ்விடத்தில் குறிக்கோள் சார்பு மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கிறதா என்று பார்க்கிறோம். அப்புள்ளி மீச்சிறு மதிப்பைக் கொடுக்கத் தவறினால், அப்புள்ளியை யடுத்த வேறொரு கோடிப்புள்ளியை (இரண்டு கோடிப்புள்ளிகளை குவிப் பன்முகியின் ஒரு முகத்தின் வழியே ஒன்றுசேர்க்க முடிந்தால், அவை அடுத்தடுத்த கோடிப்புள்ளிகள் எனப்படும்) குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு முந்திய கோடிப்புள்ளியிடத்து மதிப்பைவிடக் குறைவுறுமாறு காண வேண்டும். திரும்பத் திரும்ப இவ்வாறே தொடர்ந்து ஒருசில படிகளில்—பொதுவாக, m முதல் $2n$ தடவைகளில்—மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வைக் காணலாம். சிம்ப்ளக்ஸ் முறையினால் பிரச்சினைக்கு வரம்புடைய மீச்சிறு தீர்வுகள் அல்லது செய்தக்க தீர்வுகள் இல்லாத போதும் அப்பண்பைக் கண்டறிந்து கூற முடிகிறது. எனவே, இது எந்த நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கும் தீர்வுகாண உதவும் திறன் கொண்ட முறையாகும்.

அடுத்து வரும் பாடங்களில் இந்த முறையைப் பற்றி விரிவாக ஆராய்கிறோம். அதற்கு முன்னர் சில கணக்கீட்டு முறைகளைக் காண்போம்.

2.3 கோடிப் புள்ளித் தீர்வுகளைப் பிறப்பித்தல் :

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான கோடிப்புள்ளித் தீர்வு ஒன்று கொடுத்துள்ள n வெக்டர்களுள் m வெக்டர்கள் மூலமாகத் தெரிவிக்கப்பட்டுள்ளது என்க. தேவையானால் வெக்டர்களின் வரிசையை மாற்றி P_j $(j=1, 2, \ldots, n,)$ என்ற வெக்டர்களுள் முதல் m வெக்டர்கள் $P_1, P_2, \ldots, P_m$ ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் என்றும்

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0,)$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட கோடிப்புள்ளித் தீர்வு வெக்டர் என்றும் கொள்க. எனவே,

$$x_1 P_1 + x_1 P_2 + \ldots + x_m P_m = P_0 \qquad (2.8)$$

$(x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m)$ என்று எழுதலாம். இந்தத் தீர்வி லிருந்து வேருெரு கோடிப்புள்ளித் தீர்வைத் திறம்படக் காண்பதே இப்பகுதியில் நமது நோக்கமாகும். $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்பன ஒரு படிச்சாரா வெக்டர்கள் என்பதால் Em வெளியில் இவை ஓர் அடிப்படை வெக்டர்கள் கணத்தை அமைக்கும். எனவே இவ்வெளியில் எந்த வெக்டர் $P_j\,(j = 1, 2, \ldots, n,)$—யையும் அடிப்படை வெக்டர்களின் ஏதோவொரு வீற்று (unique) நேரியச் சேர்க்கையாக எழுதலாம்.

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

என்க. இங்கு x_{ij} என்பன மாறிலிகள். ($j = i < m$ என்ருல் $x_{ij} = 0$ ($(i \neq j)$, $x_{ii} = 1$ என்பதைக் கவனிக்கவும்). அடிப் படை வெக்டர் அல்லாத ஏதாவதொரு வெக்டரை P_{m+1} என்றே கொள்வோம்—அடிப்படை வெக்டர்கள் மூலமாகத் தெரிவிக்கும் போது $P_i\,(i = 1, 2, \ldots, m)$-களின் ஒரு குணகமாவது (பூச்சியம் அல்லாத) மிகை எண் என்று எடுத்துக் கொள்கிருேம். அதாவது,

$$P_{m+1} = x_{1, m+1} P_1 + x_{2,m+1} P_2 + \ldots + x_{m, m+1} P_m \quad (2.9),$$

என்றும், $x_{i,m+1} > 0$ என்றும் கொள்கிருேம். சமன்பாடு (2.8)-இ லிருந்து θ மடங்கு (2.9)-ஐக் கழித்தால்

$$(x_1 - \theta x_{1, m+1}) P_1 + (x_2 - \theta x_{2, m+1}) P_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{m, m+1}) P_m + \theta P_{m+1} = P_0 \qquad (2.10)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து

$$X^* = (x_1 - \theta x_{1, m+1}, x_2 - \theta x_{2, m+1}, \ldots, x_m - \theta x_{m, m+1}\, \theta, 0 \ldots 0)$$

என்பது பிரச்சினைக்கான ஒரு தீர்வு என்றும், அதன் மூலகங்கள் யாவும் குறையல்லா எண்கள் ஆயின் அது செய்தக்க தீர்வு என்றும் அறியலாம். X^*-ஐ X-இலிருந்து மாறுபட்ட தீர்வாகப் பெற நாம் விழைவதால் θ ஒரு மிகை எண் என்ற கட்டுப்பாட்டைப் புகுத்து கிருேம். இதன் காரணமாக $x_{i, m+1} < 0$ என்ருல் $x_i - \theta x_{i, m+1} > 0$ என்ருகிறது. எனவே X^*-ல் $x_{i,m+1} > 0$ என்ற மூலகங்களே மட்டுமே ஆராய்தல் போதுமானது. நமது நோக்கம் எல்லா $x_{i,m+1} > 0$-க்கும் $x_i - \theta x_{i,m+1} > 0$ என்றிருக்குமாறு மிகை எண் θ-ஐக் கண்டுபிடிப் பதாகும்.

$$\theta_0 = \underset{i,\, x_{i, m+1} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(\frac{x_i}{x_{i, m+1}} \right)$$

என்றால் $0 < \theta < \theta_0$ என்றவாறுள்ள எந்த θ வுக்கும் X^* சமன்பாடுகள் (2.2)-க்கு செய்தக்க தீர்வாகும். நமது நோக்கம் கோடிப் புள்ளி தீர்வுகளைக் காண்பது என்பதால் X^*-ன் முதல் $(m+1)$ மூலகங்கள் யாவுமே மிகையாக இருக்க முடியாது. எனவே, அவற்றுள் ஒன்றை நாம் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்துகிறோம். ஆகவே, $\theta = \theta_0$ என்று எடுத்துகொண்டால், மீச்சிறுமத்திற்குச்சரியான i மதிப்பை ஏற்கும் மூலகம் 0 ஆகும். பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாத வகையால் இதை முதல் மூலகம் எனக் கொள்ளலாம்.

அதாவது,

$$\theta_0 = \underset{i,\ x_{i,\ m+1} > 0}{\text{மீச் சிறுமம்}} \left(\frac{x_i}{x_{i,\ m+1}} \right) = \frac{x_1}{x_{1,\ m+1}}$$

என்று எடுத்துக்கொள்கிறோம். எனவே,

$$x_2^* P_2 + x_3^* P_3 + \ldots + x_m^* P_m + x_{m+1}^* P_{m+1} = P_0$$

என்பது ஒரு செய்தக்க தீர்வு ஆகும். இங்கு

$$x_i^* = x_i - \theta_0 x_{i,\ m+1},\ i = 2, \ldots, m;$$

$$x_{m+1}^* = \theta_0$$

இனி X^* ஒரு கோடிப்புள்ளி என நிரூபிக்கவேண்டும். இதற்கு $P_2, P_3, \ldots, P_m, P_{m+1}$ ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் என நிரூபித்தல் போதுமானது. மாறாக, அவை தம்முள் ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்றால், வரையறையிலிருந்து, குறைந்தது ஒரு பூச்சியமல்லாத d_i-க்காவது

$$d_2 P_2 + d_3 P_3 + \ldots + d_m P_m + d_{m+1} P_{m+1} = O \qquad (2\text{-}11)$$

என்னுமாறு d_i-களைக் காணலாம். $P_2 \ldots P_m$ தம்முள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்களின் உட்கணம் என்பதால் அவைகளும் தம்முள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்களே. எனவே, $d_{m+1} \neq 0$ என்பது தான் உண்மையாக இருக்க வேண்டும். ஆகையால்,

$$\left.\begin{aligned} e_2 P_2 + e_3 P_3 + \ldots + e_m P_m &= P_{m+1} \\ e_i &= -d_i/d_{m+1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

சமன்பாடு (2.9)-லிருந்து (2.12)-ஐக் கழித்தால்,

$$x_{1,\ m+1} P_1 + (x_{2,m+1} - e_2) P_2 + \ldots + (x_{m,\ m+1} - e_m) P_m = O \qquad (2\text{-}13)$$

என்று கிடைக்கிறது. $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்பன தம்முள் ஒருபடிச்சாரா வெக்டர்கள் என்பதால் சமன்பாடு (2.13)-ன் எல்லா குணகங்களும் பூச்சியமாகும். ஆனால் P_1-ன் குணகம் $x_{1,m+1}$ மிகையெண் என்பது நமது எடுகோளாகும். இந்த முரண்பாடு $P_2, P_3, \ldots, P_{m+1}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒருபடிச் சார்ந்தவை என்ற கூற்று தவறானது என்று

காட்டுகிறது. எனவே, P_2, P_3,...P_{m+1} ஒரு படிச்சாரா வெக்டர்கள்; அதாவது, X^* ஒரு கோடிப்புள்ளியாகும். இந்த முயற்சியை— அதாவது, மேலும் மேலும் புதிய கோடிப்புள்ளித் தீர்வுகள் காண்பதை—தொடருவதற்குப் புது அடிப்படையில் இல்லாத எந்த வெக்டரையும் அடிப்படை வெக்டர்கள் $P_2, P_3, \ldots P_{m+1}$ மூலம் தெரிவிக்க வேண்டும். சமன்பாடு (2.9)-இலிருந்து

$$P_1 = \frac{1}{x_{1,m+1}}(P_{m+1} - x_{2,m+1}\,P_2 - \ldots - x_{m,m+1}\,P_m) \quad (2.14)$$

என்று கிடைக்கிறது. இனி

$$P_j = x_{1j}\,P_1 + x_{2j}\,P_2 + \ldots + x_{mj}\,P_m \quad (2.15)$$

என்பது அடிப்படையில் இல்லாத வெக்டர் என்க. சமன்பாடு (2.15)-ல் (2.14) இலிருந்து P_1 க்கு ஈடுசெய்தால்

$$P_j = \left(x_{2j} - \frac{x_{1j}\,x_{2,m+1}}{x_{1,m+1}}\right)P_2 + \left(x_{3j} - \frac{x_{1j}\,x_{3,m+1}}{x_{1,m+1}}\right)P_3$$

$$\ldots + \left(x_{mj} - \frac{x_{1j}\,x_{m,m+1}}{x_{1,m+1}}\right)P_m + \frac{x_{1j}}{x_{1,m+1}}\,P_{m+1} \quad (2.16)$$

குறிப்பு : நாம் $\theta > 0$ என எடுத்துக் கொண்டோம். இதன் காரணமாக $x_{i,m+1} > 0$-க்குச் சரியாக ஒரு $x_i > 0$ என இருக்க வேண்டும் என்றாகிறது. பொதுவாக, இம்மாதிரி இருக்கவேண்டும் என்ற தேவை இல்லை. ஆனால் எல்லா அடிப்படை செய்தக்க தீர்வுகளும் கேடுறா வெக்டர்களைப் பெற்றிருக்குமானால் இந்த நிலை உண்மையே. எனவே, θ-க்கு பூச்சியம் மதிப்பையும் கொடுக்கக் கூடும். அதாவது, $x_{i,m+1} > 0$, $x_i = 0$ என்றும் இருக்கலாம். இவ்வாறு இருந்தால் நமது முயற்சி பழைய கோடிப்புள்ளியை மாற்றாமல் புது செய்தக்க அடிப்படையைப் பொறுக்குகிறது. சுருங்கக் கூறின், சிம்ப்ளக்ஸ் முறை θ-க்கு எல்லா குறையல்லா மதிப்புகளையும் அனுமதிக்கிறது.

(ii) எல்லா $x_{i,m+1} < 0$ என்று இருக்குமானால் அடிப்படையில் இருந்து $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்ற வெக்டர்களுள் ஒன்றையாவது நீக்கத் தகுந்த மிகை θ-ஐக் காண்பது இயலாததாகிவிடும். இந்த நிலையில், எந்த $\theta > 0$-க்கும் சரியான கோடிப் புள்ளியல்லாத $P_1, P_2, \ldots P_m, P_{m+1}$ என்ற $(m+1)$ வெக்டர்கள் கொண்ட செய்தக்க தீர்வு ஒன்றைப் பெறுகிறோம். இது பிரச்சினை வரம்புடைய மீச்சிறு தீர்வைப் பெறவில்லை என்பதைச் சுட்டிக் காட்டும்.

எடுத்துக்காட்டு: பின்வரும் சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0
x_1			$+\ 2x_4$	$-\ x_5$	$=\ 4$
	x_2		$-\ x_4$	$+\ x_5$	$=\ 3$
		x_3	$+\ 4x_4$	$-\ 2x_5$	$=\ 6$

இங்கு $X = (4, 3, 6, 0, 0)$ என்பது ஒரு கோடிப் புள்ளித் தீர்வு ஆகும். வெக்டர் குறியீட்டில்

$$4P_1 + 3P_2 + 6P_3 = P_0 \tag{2.17}$$

என்று எழுதலாம். P_1, P_2, P_3 என்பன ஓரலகு வெக்டர்கள். இவை முப்பரிமாண வெக்டர் வெளியில் தம்முள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் ஆகும். இம்மூன்று வெக்டர்களுள் ஒன்றை நீக்கிவிட்டு P_4-ஐப் புகுத்தி வேறொரு கோடிப்புள்ளித் தீர்வைக் காண முயலுவோம். P_4-ஐ அடிப்படை வெக்டர்கள் P_1, P_2, P_3 மூலமாக

$$2P_1 - P_2 + 4P_3 = P_4 \tag{2.18}$$

என்று எழுதலாம். இந்த விரிவில் P_1, P_3-க்களின் குணகங்களே மிகை எண்கள். சமன்பாடு (2.18)-ஐ θ-ஆல் பெருக்கி சமன்பாடு (2.17)-இலிருந்து கழித்தால்,

$$(4-2\theta)\, P_1 + (3+\theta)\, P_2 + (6-4\theta)\, P_3 + \theta P_4 = P_0$$

எனக் கிடைக்கும்.

$$\theta = \theta_0 = \text{மீச்சிறுமம்}\ \left(\tfrac{4}{2}, \tfrac{6}{4}\right) = \tfrac{6}{4} = \tfrac{3}{2}$$

என்னுமாறு θ-ஐ தேர்ந்தெடுத்தால் P_3 நீக்கப்பட்டு

$$P_1 + \tfrac{9}{2} P_2 + \tfrac{3}{2} P_4 = P_0$$

என்ற புதிய கோடிப்புள்ளித் தீர்வு கிடைக்கிறது. அதாவது

$$X^* = (1,\ \tfrac{9}{2},\ 0,\ \tfrac{3}{2}.\ 0)$$

என்பது கோடிப்புள்ளித் தீர்வு ஆகும். இம்மாதிரியே,

$$7\ P_1 + 12\ P_3 + 3\ P_5 = P_0$$

அல்லது

$$X^{**} = (7, 0, 12, 0, 3)$$

என்பதும் ஒரு கோடிப் புள்ளித் தீர்வு என நிரூபிக்கலாம்.

பயிற்சிகள்—பாடம் 2.

(2-1) பின்வரும் சமன்பாடுகளின் ஒரு கோடிப் புள்ளித் தீர்வு $x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ x_4 = 8,\ x_5 = 15,\ x_6 = 10$ ஆகும்.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 \quad + x_4 \quad &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_5 \quad &= 15 \\ 2x_2 + 5x_3 \quad + x_6 &= 10 \end{aligned}$$

இப் பிரச்சினைக்கு மேலும் இரண்டு கோடிப்புள்ளித் தீர்வுகளைக் காணவும்.

(2.2) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \quad &= 25 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 12 \end{aligned}$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு (2, 1, 3, 2, 1,) ஒரு செய்தக்க தீர்வு ஆகும். இதிலிருந்து இரண்டு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வுகளைக் காண்க. (ஹாட்லி)

(2.3) $$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 15 \end{aligned}$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு (1, 2, 1, 3) ஒரு செய்தக்க தீர்வு என்றால், அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு ஒன்றைக் காண்க. (ஹாட்லி)

(குறிப்பு : $$\begin{aligned} P_1 &= (5 \quad 2 \quad 1) \\ P_2 &= (-4 \quad 1 \quad 6) \\ P_3 &= (3 \quad 5 \quad -4) \\ P_4 &= (1 \quad -3 \quad 2) \\ P_0 &= (3 \quad 0 \quad 15) \end{aligned}$$

என்பவை நிரல் வெக்டர்கள் என்றால்,

$$P_1 + 2P_2 + P_3 + 3P_4 = P_0$$

என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. P_i - கள் தம்முள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டர்கள் $86\ P_1 - 44\ P_2 - 139\ P_3 - P_4 = 0$ என நிரூபித்து, இதிலிருந்து தேவையான செய்தக்க தீர்வை P_2, P_3, P_4 மூலமாகக் காண்க).

3. சிம்ப்ளக்ஸ் முறை

3.1 அறிமுகம் :

இந்தப் பகுதியில் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வுகாண உதவும் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைபற்றிச் சிறிது ஆராய்கிறேம். மேலும் விவரங்கள் அடுத்து வரும் பகுதிகளிலும், பாடங்களிலும் தரப்படும். இம்முறையின் நுணுக்கங்களை நன்கு புரிந்து கொள்ள உதவியாக இருக்கும் பொருட்டு இரண்டு எடுத்துக் காட்டுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு (1): x_i, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, என்ற குறையல்லா மாறிகள் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_2 + 5x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 &= 1 \\ 5x_2 + 3x_3 + x_6 &= 4 \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

$C=3x_1+4x_2+7x_3$ என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: இந்தக் கணக்கை முறையாகப் போடும் விதம் பின்னர் விவரிக்கப்படும். இங்கு நேரிடையாக இச் சமன்பாடுகளை அணுகி C-ன் மீச்சிறு மதிப்பைக்காண முயலுவோம்.

மொத்தம் 6 மாறிகளில் 4 சமன்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், ஏதாவது 4 மாறிகளை (x_3, x_4, x_5, x_6 என்க) மற்ற விரண்டு மாறிகள் (x_1, x_2) மூலமாக எழுதிக் கொள்வோம். சமன்பாடுகள் (3.1)-ல் முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ என்பதால் இம்மதிப்பை மற்ற சமன்பாடுகளில் ஈடு செய்து (3.1)-க்கு எல்லாவிதத்திலும் சமமான பின்வரும் சமன்பாடுகளை எழுதுகிறேம்:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= -4 + 4x_2 + 5x_3. \\ &= -4 + 4x_2 + 5(1 - x_1 - x_2) \\ &= 1 - 5x_1 - x_2. \\ x_5 &= 1 - 2x_1 - x_2. \\ x_6 &= 1 + 3x_1 - 2x_2. \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

மேலும்,

$$C = 7 - 4x_1 - 3x_2$$

சமன்பாடுகள் (3.2)-ல் இடது புறத்தில் உள்ள மாறிகள் x_3, x_4, x_5, x_6 என்பவற்றை அடிப்படை மாறிகள் என்றும் வலது புறம் உள்ள x_1, x_2 என்பவற்றை அடிப்படையல்லா மாறிகள் என்றும் கூறுவது வழக்கம். கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளுள் எவையேனும் இரண்டை அடிப்படையல்லா மாறிகளாகவும் எஞ்சிய நான்கை அடிப்படை மாறிகளாகவும் கொள்ளக்கூடுமாதலால் சாரா மாறிகள், சார்ந்த மாறிகள் என்று இவற்றை வழங்காமல் புதுப் பெயரால் அழைக்கிறோம். சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் அடிப்படையல்லா மாறிகளை ஏதோவொரு விதிப்படி அடிப்படை மாறிகளாக மாற்றி அதே சமயம் அவற்றினிடத்து ஒத்த எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை மாறிகளை அடிப்படையல்லா மாறிகளாகவும் மாற்றி கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் வெவ்வேறு சமான அமைப்புகளை ஏற்படுத்திப் படிப்படியாக C-ன் மதிப்பைக் குறைத்து அதன் மீச்சிறுமத்தைக் காண்கிறோம்.

அடிப்படையல்லா மாறிகளை 0-க்கு சமன்படுத்தி, அடிப்படை மாறிகளுக்குக் காணப்படும் மதிப்புகள் ஒரு முன்னோடித் தீர்வைத் தருகின்றன. நமது எடுத்துக்காட்டில் $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$ என்பது முன்னோடித் தீர்வாகிறது. E^6-வெளியில் $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,)$ என எழுதினால் (0, 0, 1, 1, 1, 1) என்பது முன்னோடித் தீர்வாகும். இத் தீர்விற்கு C-ன் மதிப்பு 7 ஆகும்.

இத்தருணத்தில் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் ஒரு நேர்த்தியானதும் எளிமையானதுமான பண்பு கவனிக்கத் தக்கது. முன்னோடித் தீர்வுகளைக் கொடுக்கும் சமன்பாடுகளின் தொகுதி (3.2) முந்திய சமன்பாடுகளின் தொகுதி (3.1)-இலிருந்து பெறப்பட்டவையாயினும் அவை எல்லா விதத்திலும் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளுக்கு சமமானவையே. எனவே புதுச்சமன்பாடுகளைச் சரியாக எழுதியவுடன் பழைய சமன்பாடுகளை அறவே மறந்துவிடலாம் !

குறையல்லா எண்களாக இருக்கவேண்டிய மாறிகளின் மதிப்புகளெல்லாம் முன்னோடித் தீர்வில் குறையல்லாமலே உள்ளன. இம்மாதிரித் தீர்வுகளைத்தான் நாம் செய்தக்க தீர்வுகள் என்று வரையறுத்தோம். (§ 2.2-ஐப் பார்க்கவும்). தற்செயலாக முன்னோடித் தீர்வு இக் கணக்கில் செய்தக்க தீர்வாகவுள்ளது. எல்லா கணக்குகளிலும் இவ்வாறு இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை. எந்த முன்னோடித் தீர்விலிருந்தும் செய்தக்க தீர்வு ஒன்றைக் காணும் முறை பின்னர் விவரிக்கப்படும். தற்சமயம், முன்னோடித் தீர்வு செய்தக்கது எனின் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை C-ஐ மீச்சிறுமப்

படுத்தும் தீர்வை அதனின்றும் பெற எங்ஙனம் உதவுகிறது என்பதை மட்டும் ஆராய்வோம்.

C-ன் முன்னோடி மதிப்பு 7 என்று கண்டோம். தவிரவும் $C = 7 - 4x_1 - 3x_2$ ஆகும். C – ல் அடிப்படையல்லா மாறி ஒன்றின் குணகம் மிகை எண்ணாக இருப்பின் அம்மாறியின் மதிப்பைப் பூச்சியத்திலிருந்து அதிகரித்துக் கொண்டு போய் மற்ற அடிப்படை மாறிகளைப் பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்தால் C-ன் மதிப்பும் அதிகரித்துக் கொண்டு செல்லும். எனவே, அந்த அடிப்படை மாறியின் மதிப்பு பூச்சியம் என்றால் தான் C-க்குக் குறைந்த மதிப்புக் கிடைக்கிறது. ஆனால் குறையெண் குணகம் பெற்ற அடிப்படையல்லா மாறி C-ல் இருப்பின் அதன் மதிப்பைக்கூட்டி மற்ற அடிப்படையல்லா மாறிகளைப் பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்தால் C-ன் மதிப்பு குறைவுறுகிறது. அடிப்படையல்லா மாறியொன்றின் மதிப்பை அதிகரிக்கும் போது இடதுபுறம் உள்ள அடிப்படை மாறிகள் குறை யெண்களாக ஆகாதவாறும் பார்த்துக் கொள்ளவேண்டும். எனவே, அடிப்படை மாறிகள் குறையெண் களாக மாறாத வகையில் எவ்வளவுக்கெவ்வளவு C-ன் வலப்புறம் உள்ள குறைக்கெழு பெற்ற அடிப்படையல்லா மாறியை அதிகரிக் கிறோமோ அவ்வளவுக்கவ்வளவு C-ன் மதிப்பைக் குறைவுறச் செய் யலாம். ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட அடிப்படையல்லா மாறிகள் C–ல் குறைக்கெழு பெற்றிருந்தால் அவற்றுள் நிரம்பவும் குறையாக (Most negative) உள்ள கெழுவைப் பெற்ற அடிப்படையல்லா மாறியின் மதிப்பை அதிகரிக்க முயலுகிறோம். அது சமயம் முன்னர் கூறியவாறு மற்ற அடிப்படையல்லா மாறிகளைப் பூச்சி யத்திற்கு ஈடு செய்கிறோம்.

நமது கணக்கில் x_1-ன் கெழு C-ல் நிரம்பவும் குறையாக உள்ளது. எனவே, இன்னொரு அடிப்படையல்லா மாறி x_2-ஐ பூச்சியத்திற்கு [illegible] சமன் செய்து பின்வரும் சமன்பாடுகளை (3.2)- இலிருந்து பெ[illegible]றுகிறோம்.

$$\left.\begin{aligned} C &= 7 - 4x_1 \\ x_3 &= 1 - x_1 \\ x_4 &= 1 - 5x_1 \\ x_5 &= 1 - 2x_1 \\ x_6 &= 1 + 3x_1 \end{aligned}\right\}$$

இச் [illegible]ன்பாடுகளில் x_3, x_4, x_5, x_6 எல்லாம் $\geqslant 0$ என்று இருக்க வேண[illegible]மாதலால், $x_1 \leqslant 1$; $x_1 \leqslant \frac{1}{5}$; $x_1 \leqslant \frac{1}{2}$; $x_1 \geqslant -\frac{1}{3}$ என்ற சம னின்[illegible]மகள் யாவும் உண்மையாகவேண்டும். $x_1 \geqslant 0$ என்பதால் கடை[illegible]ச் சமனின்மை உண்மையே என்பது தெளிவு. மற்றவற்றை யும் [illegible]றைவு செய்யுமாறு உள்ள x_1-ன் மீப் பெருமதிப்பு $\frac{1}{5}$ தான்.

$x_1 > \frac{1}{5}$ என்ருல் $x_4 < 0$ என்று ஆகிவிடும். எனவே, x_1 - ஐ 0–இலிருந்து $\frac{1}{5}$ வரைதான் அதிகரிக்கக்கூடும். $x_1 = \frac{1}{5}$ என்னும்போது $x_4 = 0$ என்றும், $x_3 > 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 > 0$ என்றும் உள்ளது. இப்பொழுது பூச்சியமாக்கப்பட்ட x_4 -ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும், பூச்சியத்திலிருந்து $\frac{1}{5}$ - ஆக உயர்த்தப்பட்ட x_1-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும் மாற்றி சமன்பாடுகள் (3.2)–க்குச்— எனவே, சமன்பாடுகள் (3·1)–க்குச் — சமமான பின்வரும் சமன்பாடுகளேப் பெறுகிரேம் :

$$\left.\begin{aligned} C &= \tfrac{31}{5} + \tfrac{4}{5}x_4 - \tfrac{11}{5}x_2 \\ x_3 &= \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5}x_4 - \tfrac{4}{5}x_2 \\ x_1 &= \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}x_4 - \tfrac{1}{5}x_2 \\ x_5 &= \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5}x_4 - \tfrac{3}{5}x_2 \\ x_6 &= \tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{5}x_4 - \tfrac{13}{5}x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot3)$$

சமன்பாடுகள் (3·2)-ல் இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து சமன்பாடுகள் (3·3)-ன் மூன்ருவது சமன்பாட்டை முதலில் எழுதிப் பின்னர் அதை (3·2)–ன் மற்ற சமன்பாடுகளில் பயன்படுத்தி (3·3)-ன் ஏனைய சமன்பாடுகளே எழுதுகிரேம் என்பதைக் கவனிக்கவும். சமன்பாடுகள் (3·3)-ல் அடிப்படையல்லா மாறிகள் x_4, x_2 என்று மாறியுள்ளன. இவற்றைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்திஞல் $(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{8}{5})$ என்ற செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கிறது. மேலும், இந்த நிலையில் இத் தீர்விற்கு C-ன் மதிப்பு $\frac{31}{5}$. இது முந்திய மதிப்பு 7-ஐ விடக் குறைவாகும்.

கணக்கின் புதுவுரு (3.3)–ல் C-ன் மதிப்பை மேலும் இது போன்றே குறைவுறச் செய்ய முடியுமா என ஆராய்கிரேம். C-ல் x_2-ன் கெழு குறையாக உள்ளது. இதன் மதிப்பை பூச்சியத்திலிருந்து அதிகரித்து, அதேசமயம் $x_4 = 0$ என்றும் கொண்டு, C-ன் மதிப்பைக் குறைக்கலாம். $x_4 = 0$ என்னும்போது சமன்பாடுகள் (3·3) லிருந்து

$$\begin{aligned} x_3 &= \tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}x_2 \\ x_1 &= \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}x_2 \\ x_5 &= \tfrac{3}{5} - \tfrac{3}{5}x_2 \\ x_6 &= \tfrac{8}{5} - \tfrac{13}{5}x_2 \end{aligned}$$

என்று கிடைக்கின்றன. அடிப்படை மாறிகள் குறையற்ற எண்களாக இருக்கவேண்டும் என்பதால், $x_2 \leqslant \frac{8}{13}$ என்ருகிறது. $x_2 > \frac{8}{13}$ என்ருல் $x_6 < 0$ என்று ஆகிவிடும். எனவே x_2-க்கு $\frac{8}{13}$-ஐ விட அதிக மதிப்புத் தவிர்க்கப்படவேண்டும். மற்ற அடிப்படை மாறிகளும் $x_4 = 0$ என்னும்போது $x_2 = \frac{8}{13}$ என்ருல், மிகையாகவே இருப்பதைக் கவனிக்கவும். ஆகவே, இப்பொழுது x_2-ஐ அடிப்படை

மாறியாகவும் x_6-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் மாற்றி அமைக்கிறோம்.

(3·3)-ன் இறுதிச் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x_2 = \frac{8}{13} - \frac{3}{13}x_4 - \frac{5}{13}x_6$$

என்று கண்டு இதை மற்ற சமன்பாடுகளில் ஈடுசெய்து கணக்கைப் பின்வரும் அமைப்பிற்குக் கொணர்கிறோம்:

$$\begin{aligned} C &= \frac{315}{65} + \frac{85}{65}x_4 + \frac{55}{65}x_6 \\ x_3 &= \frac{20}{65} + \frac{25}{65}x_4 + \frac{20}{65}x_6 \\ x_1 &= \frac{5}{65} - \frac{10}{65}x_4 + \frac{5}{65}x_6 \\ x_5 &= \frac{15}{65} + \frac{35}{65}x_4 + \frac{15}{65}x_6 \\ x_2 &= \frac{40}{65} - \frac{15}{65}x_4 - \frac{25}{65}x_6 \end{aligned}$$

அதாவது,

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{68}{13} + \frac{17}{13}x_4 + \frac{11}{13}x_6 \\ x_3 &= \frac{4}{13} + \frac{5}{13}x_4 + \frac{4}{13}x_6 \\ x_1 &= \frac{1}{13} - \frac{2}{13}x_4 + \frac{1}{13}x_6 \\ x_5 &= \frac{3}{13} + \frac{7}{13}x_4 + \frac{3}{13}x_6 \\ x_2 &= \frac{3}{13} - \frac{3}{13}x_4 - \frac{5}{13}x_6 \end{aligned}\right\} \qquad (3{\cdot}4)$$

சமன் பாடுகள் (3·4)-ல் அடிப்படையல்லா மாறிகள் x_4, x_6 - களை பூச்சியத்திற்கு ஈடுசெய்தால் $(\frac{1}{13}, \frac{8}{13}, \frac{4}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0)$ என்பது ஒரு செய்தக்க தீர்வு எனத் தெரிகிறது. மேலும், இப்பொழுது C-ன் மதிப்பு $\frac{68}{13}$ ஆகிறது. இது முந்திய நிலையில் கண்ட மதிப்பு $\frac{31}{5}$-ஐ விடக் குறைவாகும்.

C-ல் உள்ள அடிப்படையல்லா மாறிகள் x_4, x_6-களின் கெழுக்கள் மிகைக்குறி பெற்றுள்ளன. எனவே, C-ன் மதிப்பு $x_4 = x_6 = 0$ என்னும்போதுதான் $(x_4, x_6 \geqslant 0)$ மிகக் குறைவாகும். x_4, x_6 இரண்டும் குறையெண்களாக ஆக முடியாது என்பதால் அவை இரண்டும் பூச்சியம் என்னும்போது C-ன் மதிப்பு மீச்சிறுமம் ஆகிறது. எனவே, கணக்கின் தீர்வு வெக்டர் $(\frac{1}{13}, \frac{8}{13}, \frac{4}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0)$ என்றும், C-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{68}{13}$ என்றும் தெளிவாகிறது.

அடுத்து வரும் எடுத்துக்காட்டில் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை அமைக்கப்படும் முறையையும் விளக்குகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு (2) : உடல்நலங்குன்றிய திரு. ஆரோக்கியம் பிரபல மருத்துவர் திரு. தன்வந்திரியிடம் சென்றார். அவரைப் பரிசோதித்த பின்னர் நாள் ஒன்றுக்கு குறைந்தது 24 அலகுகள் வைட்டமின் B_1-ம், 25 அலகுகள் வைட்டமின் B_3-ம் அவர் சாப்பிட

வேண்டுமென மருத்துவர் பணித்தார். ஆனால் துரதிர்ஷ்டவசமாக இவ்விரு சத்துக்களை மட்டும் தேவையான அளவில் கொண்ட தனி மாத்திரைகள் கிடைப்பதில்லை. இருப்பினும் T_1, T_2 என்னும் இரு மாத்திரைகள் முறையே 1 அலகு B_1, 5 அலகுகள் B_2 சத்துக்களையும், 4 அலகுகள் B_1, 1 அலகு B_2 சத்துக்களையும் பெற்றவைகளாகக் கிடைக்கின்றன. இவற்றின் விலை மாத்திரை ஒன்றுக்கு முறையே 25 காசுகள், 75 காசுகள் ஆகும். தேவையான அளவுக்குக் குறையாமல் B_1, B_2 சத்துக்களைப் பெற திரு. ஆரோக்கியம் நாள் ஒன்றுக்கு எத்தனை T_1, T_2 மாத்திரைகளை வாங்கினால் செலவு மிகக் குறைந்து இருக்கும்?

தீர்வு : முதலில் திரு. ஆரோக்கியத்தின் பிரச்சினையை நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாற்றுகிறோம். ஒரு நாளைக்குத் தேவையான T_1, T_2 மாத்திரைகளை முறையே x_1, x_2 என்போம். x_1, x_2-க்கள் குறை மதிப்பைப் பெற வாய்ப்பு இல்லை. எனவே, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ என எழுதலாம். இவற்றால் கிடைக்கும் B_1 சத்துக்கள் மொத்தம் $x_1 + 4x_2$ அலகுகள் ஆகும். ஆனால் குறைந்தது 24 அலகுகள் B_1 சத்து இருக்கவேண்டும் என்பதால் $x_1 + 4x_2 \geqslant 24$ என்னும் கட்டுப்பாட்டை x_1, x_2-க்கள் நிறைவு செய்யவேண்டும். B_2–சத்துக்களின் தேவையான குறைந்தபட்ச அலகுகளிலிருந்து இம்மாதிரியே $5x_1 + x_2 \geqslant 25$ என்ற கட்டுப்பாட்டைப் பெறலாம். மேலும் மாத்திரைகளுக்கான செலவு (ரூபாய்களில்) $C = \frac{1}{4}(x_1 + 3x_2)$. C-யை ஓர் அடிப்படை மாறிபோன்று நாம் பயன்படுத்துவதால் அதை x_0 என்றும் குறிப்பதுண்டு. எனவே, நமது பிரச்சினை வருமாறு:

$$\begin{aligned} x_1 \geqslant 0\,; \qquad & x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + 4x_2 \qquad & \geqslant 24 \\ 5x_1 + x_2 \qquad & \geqslant 25 \end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$\tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{3}{4}x_2 = x_0\text{-ன் மீச்சிறு மதிப்பு காணுதல் வேண்டும்.}$$

x_0-தான் இக்கணக்கின் குறிக்கோள் சார்பு ஆகும். கட்டுப்பாடுகளில் (கடைசி இரண்டு மட்டும்) உள்ள சமனின்மைகளை சமன்பாடுகளாக மாற்ற முன்னரே கூறியபடி (§ 1.4 பார்க்கவும்). $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$ என்னும் தொய்வு மாறிகளைப் புகுத்துகிறோம். இதனால் அவை

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 24 \\ 5x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_4 &= 25 \end{aligned}$$

என்று மாறுகின்றன.

கணக்கு இப்பொழுது பின்வரும் திட்ட (standard) நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாற்றப்பட்டுள்ளது.

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3, 4$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 24$$
$$5x_1 + x_2 - x_4 = 25$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் x_i–களுக்கு,

$$x_0 = \tfrac{1}{4}(x_1 + 3x_2)$$

என்னும் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு காண்க.

முதலில் x_1, x_2-க்களை அடிப்படையல்லா மாறிகளாகவும் x_3, x_4-களை அடிப்படை மாறிகளாகவும் கொண்டால்,

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{1}{4}(x_1 + 3x_2) \\ x_3 &= -24 + x_1 + 4x_2 \\ x_4 &= -25 + 5x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \quad (3{\cdot}5)$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. அடிப்படையல்லா மாறிகளை அதாவது x_1, x_2-களை பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்தால் $(0, 0, -24, -25)$ என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது. இத்தீர்விற்கு $x_0 = 0$ ஆகும். ஆனால் இத்தீர்வு செய்தக்கது அல்ல. மிகைமதிப்புகளை ஏற்க வேண்டிய மாறிகள் குறைமதிப்புகளைப்பெற்றிருப்பதே இதற்குக் காரணம் ஆகும். அடிப்படையல்லா மாறிகளுள் ஒன்றை அடிப்படை மாறியாகவும், அடிப்படை மாறிகளுள் ஒன்றை அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் மாற்றி எழுதினால் செய்தக்க தீர்வு ஒன்று கிடைக்கிறதா என முயற்சிக்கிறோம். x_1-ஐ அடிப்படைமாறி யாகவும் x_3-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும்.

$$x_3 = -24 + x_1 + 4x_2$$

என்ற சமன் பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும்

$$x_1 = 24 + x_3 - 4x_2$$

என்ற தொடர்பைப் பயன்படுத்தி மாற்றி சமன்பாடுகள் (3.5)-லிருந்து,

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 6 + \tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_2 \\ x_i &= 24 + x_3 - 4x_2 \\ x_4 &= 95 + 5x_3 - 19x_2 \end{aligned}\right\} \quad (3{\cdot}6)$$

என்னும் சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

$x_2 = x_3 = 0$ என்னும் போது சமன்பாடுகள் (3.6)-லிருந்து $x_1 = 24$; $x_4 = 95$; $x_0 = 6$ எனக்கிடைக்கின்றன. அதாவது $x_i \geqslant 0$,

$i = 1, 2, 3, 4,$ சமன்பாடுகள் (3.6) – ஆகிய கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்ற (24, 0, 0, 95) என்ற செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கிறது. இத்தீர்விற்கு x_0-ன் மதிப்பு 6 என்றும் தெரிகிறது. ஆனால் x_0-ன் விரிவில் அடிப்படையல்லா மாறி x_2-ன் கெழு குறையெண்ணாக இருப்பதால் பூச்சியத்திலிருந்து அதன் மதிப்பை உயர்த்தி x_0-ன் மதிப்பைக் குறைக்கக்கூடும். அதே சமயம் $x_1 > 0$, $x_4 > 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளும் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டுமாதலால் $x_3 = 0$ என்னும் போது $24 - 4x_2 > 0$, $95 - 19x_2 > 0$, அதாவது $x_2 < 6, x_2 < 5$ என்பவை உண்மையாக வேண்டும். ஆகவே, x_2-ஐ பூச்சியத்திலிருந்து 5 வரைதான் உயர்த்தலாம். $x_2 = 5$ என்று மாறும்போது $x_4 = 0$ என்று ஆகிறது. ($x_3 = 0$ என்று முன்பே எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம்). இப்பொழுது x_2-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும், x_4-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் மாற்றி $x_2 = 5 + \frac{5}{19}x_3 - \frac{1}{19}x_4$ என்ற தொடர்பைப் பயன் படுத்திச் சமன்பாடுகள் (3.6)-ஐ

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{19}{4} + \frac{14}{76}x_3 + \frac{1}{76}x_4 \\ x_1 &= 4 - \frac{1}{19}x_3 + \frac{4}{19}x_4 \\ x_2 &= 5 + \frac{5}{19}x_3 - \frac{1}{19}x_4 \end{aligned}\right\} \qquad (3{\cdot}7)$$

என எழுதலாம்.

இந்த அமைப்பில் x_0-ல் நடைமுறை (current) அடிப்படையல்லா மாறிகளின் கெழுக்கள் மிகைக்குறி பெற்றுள்ளன. எனவே x_0-ன் மதிப்பு $x_3 = x_4 = 0$ என்னும் போது தான் மிகக் குறைந்து இருக்கும். இந்நிலையில் $x_1 = 4$; $x_2 = 5$ என்றும் கிடைக்கின்றன. எனவே(4,5,0,0) என்ற செய்தக்க தீர்வு தான் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் மீச்சிறு தீர்வாகும். மேலே விவரிக்கப்பட்ட முறையைத் தொடர்ந்து இனியும் குறிக்கோள் சார்பு x_0-ன் மதிப்பைக் குறைக்க இயலாது.

திரு. ஆரோக்கியத்தின் பிரச்சினைக்கான தீர்வும் கிடைத்து விட்டது. அவர் தினந்தோறும் நான்கு T_1 மாத்திரைகளையும், ஐந்து T_2 மாத்திரைகளையும் மொத்தம் ரூ. 4.75 செலவில் வாங்கி உட்கொண்டு தேவையான B_1, B_2 சத்துக்களைப் பெறலாம். வேறு எந்த எண்ணிக்கையில் மாத்திரைகள் வாங்கினாலும் தேவையான அளவைவிடக் குறைவாகவே B_1, B_2 சத்துக்களைப் பெற முடியும் அல்லது செலவு ரூ. 4.75-ஐ விடக் கூடுதலாகும்.

குறிப்பு : குறிக்கோள் சார்பில் உள்ள அடிப்படையல்லா மாறி களின் கெழுக்களைச் செலவுக் கெழுக்கள் (cost coefficients) என்றும் குறிக்கோள் சார்பை செலவுச் சார்பு (cost function) என்றும் கூறுவது உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு (2)-இதிலிருந்து ஒரு சில கூடுதலான உண்மை களும் நமக்குத் தெரிய வருகின்றன. இவ்வுண்மைகள் பொது வாகவே எல்லா நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்கும் பொருந்துவன வாகும். குறிப்பாக, குறிக்கோள் சார்பின் இறுதி அமைப்பில் வரு கின்ற அடிப்படையல்லா மாறிகளின் கெழுக்களைக் கவனிக்கவும். இவைகளைக் குறைக்கப்பட்டச் செலவுகள் (reduced costs) என் கிறோம். x_3 -ன் குறைக்கப்பட்டச் செலவு $\frac{14}{76}$. இது எதைக் குறிக்கிறது ? x_3-ஐ θ–அளவு அதிகரிப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது B_1-ன் அளவை θ அலகுகள் குறைப்பதாகக் கொள்வோம். மற்ற கட்டுப்பாடுகளில் மாற்றம் இல்லாத வரையில் x_0-ன் மதிப்பு அதாவது மருந்துக்காக ஆகும் செலவு $\frac{14}{76}\theta$ ரூபாய்கள் அதிகமாகும். துரதிர்ஷ்ட வசமாக இந்தச் செலவு வீதம் θ-ன் எம்மதிப்புகள் வரை பொருந்தும் என்பதுபற்றி நமது கணக்கீடுகள் ஏதும் சொல்வதில்லை. இது குறித்துப் பின்னர் துணையலகு நெறிப்படுத்துதல் (Parametric programming) என்ற தலைப்பில் ஆராய்கிறோம். (பாடம்–6)

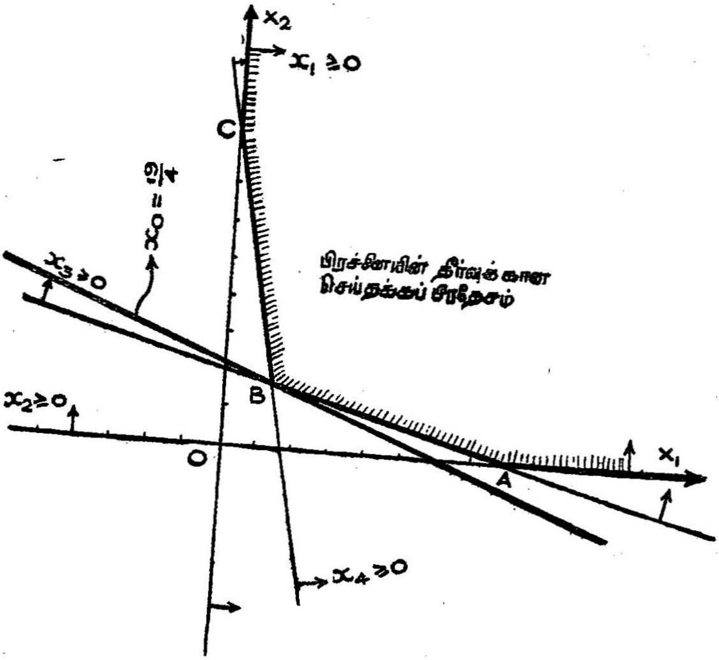
வடிவ கணித விளக்கம்:

n அடிப்படையல்லா மாறிகளைக் கொண்ட எந்தப்பிரச்சினையை யும் n பரிமாண E^n-வெளியில் உருவகப்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டு (2)-ல் $n=2$ என்பதால் சாதாரண இருபரிமாண தளத்தில் வடிவம் கொடுக்கிறோம். x_1, x_2-களைச் சாரா மாறிகளாகக் கொண்டு $x_3=0$, $x_4=0$ என்ற கோடுகளை வரைகிறோம். (படம்(3.1)-ஐப் பார்க்கவும்). $x_3\geqslant 0$, $x_4\geqslant 0$ இரண்டு அரை தளங்களைக் குறிக்கின்றன. இவை கோட்டிற்கு எப்புறம் உள்ளன என்பது அம்புக் குறியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$ இரண்டும் சேர்ந்து தளத்தின் முதற்கால் பகுதியைக் குறிப்பிடுகின்றன.

$x_i\geqslant 0$, $i=1,2,3,4$ என்ற கட்டுப்பாடுகளை எந்த செய்தக்கதீர்வும் நிறைவு செய்வதால் அவை தளத்தின் முதற் கால் பகுதியில் உள்ள $X_1ABC\,X_2$ என்ற வரம்பற்றப் பகுதியில்தான் இருக்கும். இப்பகுதி யைப் பிரச்சினைக்கான செய்தக்கப்பிரதேசம் (feasible region) என் கிறோம்

நாம் தீர்வுகண்ட முறையை படம் (3.1) உதவி கொண்டு விளக்குவோம். முதலில் O-விலிருந்து தொடங்குகிறோம். O (ஆதி)

செய்தக்கப் பிரதேசத்தில் இல்லை. எனவே, X_1 ஆயம் வழியாகச் சென்று A-யை அடைகிறோம். A-ல் $x_3 = 0$; $x_1 = 24$. இதன் பின்னர் $x_3 = 0$ என்ற கோட்டின் வழியாக B-யை அடைகிறோம்.



படம் (8.1)

இங்கு x_4-ம் 0 என்பதால் அது $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ என்ற புள்ளியைக் கொடுத்தது. இப்பொழுது $x_1 = 4$; $x_2 = 5$ என்று நமக்குக் கிடைக்கிறது.

இனி $x_0 = \frac{1}{4}(x_1 + 3x_2)$ என்ற கோட்டை x_0 - வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வரைகிறோம். x_0-ன் சில மதிப்புகளுக்கு இக்கோடு செய்தக்க பிதேசத்தை வெட்டுகிறது. வேறு சில மதிப்புகளுக்கு வெட்டுவதில்லை. $x_0 = \frac{19}{4}$ - என்னும் போது அது B என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது; மேலும் அது B -யைத் தவிர வேறெந்தப் புள்ளியிலும் செய்தக்கப் பிரதேசத்தைச் சந்திப்பதில்லை. x_0 – ன் மற்ற மதிப்புகளுக்கு $x_0 = \frac{1}{4}(x_1 + 3x_2)$ என்ற கோடு செய்தக்க பிரசேத்தைச் சந்திக்காமலே இருக்கும் அல்லது சந்தித்தாலும் x_0- ன் மதிப்பு $\frac{19}{4}$ – ஐ விடப் பெரியதாக இருக்கும். எனவே, x_0-ன் மீச்சிறு மதிப்பு கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாட்டுகளுக்கு இணங்க

$\frac{19}{4}$ ஆகும். இம்மதிப்பை அது செய்தக்கப் பிரதேசத்தின் புள்ளி B-ல் மட்டுந்தான் ஏற்கிறது. மற்ற புள்ளிகளில் ஏதாவது ஒரு கட்டுப் பாடாவது நிறைவுசெய்யப்படாமல் இருக்கும். எனவே, பிரச்சினைக் கானசெய்தக்க தீர்வு $x_1=4, x_2 = 5, x_3=0, x_4 =0$, என்பதாகும்.

செய்தக்க பிரதேசத்தின் புள்ளிகள் $(x_1, x_2,)$ அனைத்தும் E^2 தளத்தில் ஒரு குவி கணத்தை அமைக்கின்றன என்பதும் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு இக்கணத்தின் ஒரு கோடிப்புள்ளி B-ல் பெறப் படுகிறது என்பதும் ஈண்டு நோக்கத்தக்கது. தேற்றம் (2-2-ல்) இது நேரிடையாக நிரூபிக்கப்பட்டது.

மேற்கூறிய விளக்கத்திலிருந்து எல்லாப் பிரச்சினைகளுக்கும் வடிவ கணித முறையிலேயே தீர்வு கண்டு விடலாமே என்று எண் ணத்தோன்றும். ஆனல் இம்முறையில் சிலகுறைபாடுகள் உள்ளன. முதலில் இம் முறை இரு பரிமாண அளவில்தான் அதாவது இரண்டேயிரண்டு அடிப்படையல்லா மாறிகள் இருக்கும் போது மட்டும்தான்—பயன்படுத்தப்படக்கூடும். இரண்டாவதாக வடிவ அமைப்பு சிம்ப்ளக்ஸ் முறை கொடுக்கும் எல்லா விவரங்களையும் கொடுப்பது இல்லை. சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தும் போது ஒவ்வொரு நிலையிலும் பெற்ற தீர்வு குறிக்கோள் சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்பை அளிக்குமோ என்பதைக் கண்டறிவதுடன், அவ்வாறு அளிக்கத் தவறினல் அடுத்து என்ன செய்ய வேண்டும் என்பதையும் அறிந்துகொள்ள முடிகிறது.

அடுத்து வரும் பகுதிகளில் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக் கான செய்தக்கப்பிரதேசம் ஒரு குவிப்பன்முகியால் குறிக்கப்படும் என்பதையும், சிம்ப்ளக்ஸ் முறை அதன் ஒரு முனையிலிருந்து குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பைக் குறைவுறச் செய்யும் அடுத்துள்ள ஒரு முனைக்கு இட்டுச் செல்கிறது என்பதையும், அம்மாதிரி ஒரு முனை காணமுடியாது என்னும் போது இறுதித் தீர்வு பெறப் படுகிறது என்பதையும் விரிவாகப் பார்ப்போம். ஒவ்வொரு நிலை யிலும் குறிக்கோள் சார்பில் குறைந்தது ஓர் அடிபடையல்லா மாறி யின் கெழு குறை எண்ணுக இருக்குமாஞல் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை மேலே தொடரும். மாருக, எல்லா கெழுக்களும் மிகை எண் களாகவே இருந்து விட்டால் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை இறுதி நிலையை அடைந்துவிட்டது என்கிறோம். ஒரு சில மாறிகளே உள்ள தாலும், இறுதி நிலை ஏதாவது கோடிப் புள்ளியில்தான் பெறப் படும் என்பதாலும், குவிப்பன்முகிக்கு ஒரு சில கோடிப்புள்ளிகளே இருக்கக்கூடும் என்பதாலும் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை ஒரு சில நிலை

களுக்குப்பின் இறுதி கட்டத்தை அடையும். m அடிப்படை மாறிகளைக் கட்டுப்பாடுகள் பெற்றிருந்தால் பொதுவாக, m முதல் $2m$ வரையிலான நிலைகளுக்குப் பின்னர் இறுதித் தீர்வு பெறப் படுகிறது.

செய்முறையில் அதிக முக்கியத்துவம் பெற்றது அன்று எனினும் மேற்கூறிய கூற்றில் ஒரு குறைபாடு உண்டு. நாம் எடுத்துக் கொண்ட முன்னோடித்தீர்வில்(trial solution) ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அடிப்படை மாறிகளும் பூச்சியமாகலாம். இதையே கேடுறுநிலை(degeneracy) என்று முந்திய பாடத்தில் குறிப்பிட்டோம். இந்த நிலையில் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை சிற்சில சமயங்களில் மீண்டும் மீண்டும் ஒரே கோடிப் புள்ளித்தீர்வை, குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பில் மாறுபாடு இல்லாமல், கொடுத்துக் கொண்டேயிருக்கும் இதை சுழற்சி (cycling) என்கிறோம். இந்தக் சிக்கலை எதிர்கொள்ள பல முறைகள் காணப்பட்டுள்ளன. ஆனால் அவை நடை முறையில் — கம்ப்யூட்டர்களைப் பயன்படுத்தும் போது — உபயோக மாவதில்லை. ஏனெனில் கம்ப்யூட்டருக்கான சங்கேதப் புரோகிராம் (coded program) எழுதும் போது இதனால் வேறு பல பிரச்சினை களைத் தீர்க்க முயலும் போது நேரம் அதிகமாகி விடுகிறது. இந்தச் சுழற்சித் தத்துவமே ஒரு பிரமைதானோ என்று முதலில் கருதப் பட்டு வந்தது. ஆனால் இது உண்மையில் நிகழக்கூடும் என்பதற்கு ஆதாரங்கள் நேரடியாகச் சில பிரச்சினைகளில் காணப்படுகின்றன. பெரிய பிரச்சினைகள் சிலவற்றில் பல சமன்பாடுகளில் மாறிலி உறுப்புகள் (constant terms) பூச்சியமானால் சுழற்சி ஏற்படலாம். அதைத் தவிர்க்கச் சிக்கலுக்கு காரணமான சமன்பாடுகளில் உள்ள மாறிலி உறுப்பான பூச்சியத்தின் இடத்தில் சிறுமதிப்புகளை ஈடு செய்து இறுதித்தீர்வில் அவற்றைப் பழைய மதிப்புகளுக்கே கொணர்கிறோம். இந்த சுழற்சித் தத்துவத்தை விளக்கும் எடுத்துக்காட்டு காஸ் அவர்களின் புத்தகத்தின் 7 - ம் பாடத்தில் தரப்பட்டுள்ளது. (Linear Programming, Methods and Applications by S. I. Gass, Mc. Graw Hill, Pp. 126—134).

3.2. மேலும் சில விவரங்களும் தேற்றங்களும்.

சென்ற பகுதியில்(§3.1)சில எடுத்துக்காட்டுகளையும் பாடம் 2-ல் குவிகணங்கள், கோடிப்புள்ளித் தீர்வுகள், தம்முள் ஒரு படிச்சாரா வெக்டர்கள் ஆகியவற்றையும் கண்டோம். இவற்றிலிருந்து நமக்குத் தெளிவாகும் விஷயங்களை முதலில் தொகுத்துப் பார்ப்போம்.

(அ) அடிப்படை செய்தக்க (கோடிப் புள்ளி) தீர்வு ஒன்று கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்கு இருக்குமானால் அதிலிருந்து திரும்பத்

திரும்ப ஒரே வழிமுறையைப் பின்பற்றி (by an iterative process) படிப்படியாக மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வை அடைவது தான் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையாகும்.

(ஆ) இந்த முறையில் ஏதாவதொரு நிலையில் குறிக்கோள் சார்புக்குக் கிடைக்கும் மதிப்பு அந்நிலைக்கு முந்திய நிலைத் தீர்வில் அது பெற்ற மதிப்பை விடக் குறைவானதாகும்.

(இ) எனவே, சிம்ப்ளக்ஸ் முறை மீச்சிறு தீர்வு கிடைக்கும் வரை தொடரப்படும்.

(ஈ) எல்லா கோடிப்புள்ளித் தீர்வுகளும், குறிப்பாக, மீச்சிறு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வும் தம்முள் ஒருபடிச் சாரா m வெக்டர் களுடன் தொடர்பு பெற்றிருக்கும். இங்கு அடிப்படை மாறிகளின் எண்ணிக்கையை m குறிக்கிறது.

எனவே, தம்முள் ஒருபடிச் சாரா m வெக்டர்களால் பெறப் பட்ட தீர்வுகளை ஆராய்கிறோம். இம்மாதிரித் தீர்வுகள் ஒரு சில தான் இருக்கும் என்பதால் ஒரு சில தடவைகள் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பிரயோகிப்பதால் இறுதித் தீர்வு கிடைத்துவிடும் என்பது தெளிவாகிறது.

பிரச்சினையின் எளிமைக்காக முதலில் பின்வரும் தற்கோள் களைக்கொள்வோம். (i) நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கு செய் தக்க தீர்வுகள் உண்டு; (ii) எல்லா செய்தக்க தீர்வுகளும் கேடுறாத் தீர்வுகள்; (iii) ஒரு செய்தக்க தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இத் தற்கோள்கள் பிரச்சினையின் பொதுமைக்கு ஊறு விளைவிக்கா என்பது பின்னர் தெளிவுபடுத்தப்படும்.

§ 2.1–ல் கூறியவாறு, நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது, § 2.1–ன் குறியீட்டில்

$$CX = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

என்ற (குறிக்கோள்) சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பை

$$AX = b = P_0 \,;\, X > O$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்பதே நமது நோக்கம் ஆகும். $c_1, c_2, \ldots, c_n$ என்பன செலவுக் கெழுக்கள் எனப்படும். எந்த நிலையிலும் கொடுக்கப்பட்ட n மாறிகள் $x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்பவற்றுள் ஏதாவது $n-m$ மாறிகளைப் பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்து மற்ற m மாறிகளின் மதிப்பையே நாம் காணப் போவ

தால் அடிப்படை மாறிகளின் மதிப்பு மட்டுமே வெக்டர்களின் மூலகங்களாகக் குறிக்கப்படும். முதல் m மாறிகள் அடிப்படை மாறிகள் என்றால்

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

என்றே எழுதுகிறோம்.

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட கேடுறு செய்தக்க தீர்வு என்றும் இதனுடன் தொடர்பு பெற்ற A-ன் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்றும் கொள்வோம். பின்னர்

$$x_{10} P_1 + x_{20} P_2 + \ldots + x_{m0} P_m = P_0 \tag{3.8}$$

$$x_{10} c_1 + x_{20} c_2 + \ldots + x_{m0} c_m = z_0 \tag{3.9}$$

என்று எழுதலாம். §3.1 - ன் எடுத்துக்காட்டு (1)-ல் 6 மாறிகள் உள்ளன. இவற்றுள் x_1, x_2 -க்களை பூச்சியமாக்கி எஞ்சிய 4 மாறிகளின் மதிப்பைக்கண்டு செய்தக்க தீர்வு ஒன்று பெற்றோம்.(3.8)-ல் $x_{10} = x_3 = 1$; $x_{20} = x_4 = 1$; $x_{30} = x_5 = 1$; $x_{40} = x_6 = 1$. மேலும் P_1, P_2, P_3, P_4 முதலியன அடிப்படை வெக்டர்கள். இவற்றை 4 - பரிமாண ஓரலகு வெக்டர்களாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

சமன்பாடு (3.8)-ல் எல்லா x_{i0} - களும் மிகை எண்களே. ஏனென்றால் X_0 ஒரு கேடுறு செய்தக்க தீர்வு ஆகும். சமன்பாடு (3.9) - ல் c_i என்பன குறிக்கோள் சார்பின் இத்தீர்வுக்காண செலவுக் கெழுக்கள் ஆகும். z_0 என்பது குறிக்கோள் சார்பின் முதனிலை (initial) மதிப்பாகும். கொடுக்கபட்டுள்ள $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்ற அடிப்படை வெக்டர்கள் தம்முள் ஒரு படிச் சாராதவை என்பதால் $P_1, P_2, \ldots P_n$ என்ற n வெக்டர்களையும் இந்த அடிப்படை வெக்டர்கள் மூலமாகத் தெரிவிக்கலாம். எனவே

$$x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \ldots + x_{mj} P_m = P_j \tag{3·10}$$

$$x_{1j} c_1 + x_{2j} c_2 + \ldots + x_{mj} c_m = z_j \tag{3·11}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

என்று எழுதுவோம். இங்கு c_i என்பது P_i-ன் ஒத்த செலவுக் கெழு ஆகும்.

அடுத்து வரும் இரு தேற்றங்களும் §3.3 - ல் விவரிக்கப்படவிருக்கும் கணக்கீட்டு முறைக்கு (algorithm) ஆதாரமானவையாகும்.

தேற்றம் (3.1): குறிப்பிட்ட ஒரு j-க்கு $z_j - c_j > 0$ என்ற கட்டுப்பாடு உண்மையாயின் கணத்தின் எந்த உறுப்பிற்கும் $z < z_0$ என்னுமாறு செய்தக்க தீர்வுகளின் கணத்தை அமைக்கமுடியும். (இங்கு, z என்பது இக்கணத்தின் ஏதாவதொரு தீர்வுக்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பாகும்). z–ன் கீழ்வரம்பு (lower bound) முடிவுள்ள (finite) எண்ணுகவோ, முடிவிலியாகவோ (infinity) இருக்கும்.

நிறுவல்: தேற்றத்தை இரு நிலைகளில் ஆராயலாம்.

நிலை (i): z–ன் கீழ்வரம்பு முடிவுள்ள எண் ஆகுக. ஒரு புதிய செய்தக்க தீர்வு சரியாக m மிகை மாறிகளைக் கொண்டதாகவும், அதன் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு முந்திய தீர்வுக்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பை விடக் குறைந்ததாகவும் காணமுடியும்.

நிலை (ii): z-ன் கீழ்வரம்பு முடிவிலி என்க. ஒரு புதிய செய்தக்க தீர்வு சரியாக $(m+1)$ மிகை மாறிகளைக் கொண்டதாகவும் அத்தீர்வுக்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு கட்டுப்பாடற்று (arbitrarily) சிறியதாக இருக்குமாறும் காண முடியும்.

இவ்விரண்டு நிலைகளுக்கும் நிருபணம் ஒன்றே. சமன்பாடு (3·10)-ஐ θ-ஆல் பெருக்கி சமன்பாடு (3·8)-இலிருந்து கழிக்கவும். அதே போன்று (3·11)-ஐ θ-ஆல் பெருக்கி (3·9)–இலிருந்து கழிக்கவும்.

$$(x_{10} - \theta x_{1j}) P_1 + (x_{20} - \theta x_{2j}) P_2 + \dots$$
$$\dots + (x_{m_0} - \theta_{mj}) P_m + \theta P_j = P_0 \qquad (3\cdot12)$$

$$(x_{10} - \theta x_{1j}) c_1 + (x_{20} - \theta x_{2j}) c_2 + \dots$$
$$\dots + (x_{m_0} - \theta x_{mj}) c_m + \theta c_j = z_0 - \theta(z_j - c_j)$$
$$(j = 1, 2, \dots, n) \qquad (3\cdot13)$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. (சமன்பாடு (3·13) - ல் இரு புறங்களுடனும் θc_j கூட்டப்பட்டுள்ளது.) சமன்பாடு (3·12)–ல் வெக்டர்களின் எல்லா கெழுக்களும் குறையல்லா எண்களாயின் நமக்குக் கிடைத்திருப்பது ஒரு செய்தக்க தீர்வாகும். இத் தீர்வுக்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு சமன்பாடு (3·13) - ன்படி,

$$z = z_0 - \theta (z_j - c_j) \qquad (3.14)$$

ஆகும். $x_{i_0} > 0$, $(i = 1, 2. \dots m)$ என்பதால், (§ 2·3) – ல் பார்த்தபடி முடிவுள்ள எண்ணுகவோ அல்லது முடிவிலியாகவோ θ என்ற எண்ணைச் சமன்பாடு (3·12)–ன் எல்லாக் கெழுக்களும்

மிகை எண்களாக இருக்குமாறு காணமுடியும். நாம் எடுத்துக் கொண்ட j-க்கு $z_j - c_j > 0$ என்பதால் (§ 2·3-ஐப் பார்க்கவும்.) (3.14)-ல் கண்ட z-ன் மதிப்பு z_0 - ஐ விடக் குறைந்ததாகும். ($\theta > 0$ என்பது நிரூபிக்கப்பட்டது.) எனவே, இரண்டு நிலைகளி லும் முந்திய குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பைவிடக் குறைந்த மதிப் புள்ள குறிக்கோள் சார்பைத் தரவல்ல புதிய செய்தக்க தீர்வைக் காணமுடியும் எனத்தெரிகிறது.

எடுத்துக்கொண்ட j-க்கு சமன்பாடு (3·10)-ல் ஒரு x_{ij}-ஆவது மிகை எண் என்க. சமன்பாடு (3·12)-ல் எல்லாக் கெழுக்களும் குறையல்லாமல் இருக்குமாறு உள்ள மிகப்பெரிய மிகை எண் θ - ஐ θ_0 என்றால்,

$$\theta_0 = \underset{i}{\text{மீச்சிறுமம்}} \; \frac{x_{i0}}{x_{ij}}, \quad (x_{ij} > 0) \qquad (3·15)$$

ஆகும். (§ 2·3).

பிரச்சினையின் தீர்வு கேடுறுதது என நாம் கொள்வதால் எந்த அடிப்படை செய்தக்க தீர்விலும் m மிகை உறுப்புகள் (மூலகங்கள்) இருக்கவேண்டும். எனவே, (3·15)-ல் உள்ள மீச் சிறுமம் i-ன் ஒரு மதிப்பிற்கு $\dfrac{x_{i0}}{x_{ij}}$ - ஆல் ஏற்கப்படும். சமன் பாடுகள் (3.12), (3·13)-களில் θ-விற்குப் பதில் θ_0 என ஈடு செய்தால் இந்த i-க்குச் சரியான கெழு பூச்சியம் ஆக வேண்டும். எனவே, $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_j, P_{i+1}, \ldots, P_m$ என்ற m வெக்டர்களைக்கொண்ட ஒரு புதிய அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு நமக்குக் கிடைத்து விட்டது.

இந்தப் புதிய அடிப்படையை முன் மாதிரியே திரும்பவும் மேற் கூறிய செயல் முறைக்கு உட்படுத்தும் போது ஒரு புது $z_j - c_j > 0$ என்றும் அதற்குச் சரியான $x_{ij} > 0$ என்றும் இருந்தால், வேறொரு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வைப் பெறலாம். இந்தத் தீர்வுக்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு இன்னமும் குறைவுறும். இந்த முறை எல்லா $z_j - c_j < 0$ என்ற நிலை வரும் வரையில் அல்லது ஏதாவது $z_j - c_j > 0$ என்னும் போது எல்லா $x_{ij} < 0$ என்று ஏற்படும் வரையில் தொடர்ந்து செயல்படுத்தப்படும்.

எல்லா $z_j - c_j < 0$ என்றால் இந்த முறையில் செய்தக்க தீர்வு காண்பது முடிவுறும். இறுதியில் கிடைத்த தீர்வுக்கான குறிக் கோள் சார்பின் மதிப்பே நாம் பெற்ற மதிப்புகளுள் மிகச் சிறியதாகும். இதுவே நிலை (i) ஆகும்.

ஏதாவது நிலையில் ஒரு j-க்கு $z_j - c_j > 0$ என்று இருந்து எல்லா $x_{ij} < 0$ என்று இருந்தால் θ - க்கு உச்ச வரம்பு ஏதும் இல்லை. எனவே, குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு $-\infty$ ஆகும். இந்த நிலையில் எந்த மிகை θ - க்கும் **(3·12)** - ன் எல்லா கெழுக்களும் மிகை எண்கள் ஆகும். எனவே, இப்பொழுது $(m + 1)$ மிகை உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு செய்தக்க தீர்வு நமக்குக் கிடைத்திருக்கிறது. ஆகவே, θ-வைத் தேவையான அளவு பெரிய எண்ணைக் கொண்டு **(3·13)**-ன் வலது புறத்தை எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் சிறிதாக்கலாம்.

தேற்றம் (3·2): ஏதாவதொரு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு $X = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m_0})$ என்பதற்கு $z_j - c_j < 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகள் $j = 1, 2, \ldots, n$ என்ற எல்லா மதிப்புகளுக்கும் உண்மையென்றால் சமன்பாடுகள் **(3·8)**, (**3·9**) மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வைத் தருகின்றன.

நிறுவல்: $Y = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ என்பது வேறொரு செய்தக்க தீர்வு என்க. இத் தீர்வுக்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு z^* என்க. பின்,

$$y_{10} P_1 + y_{20} P_2 + \ldots + y_{n0} P_n = P_0 \qquad (3·16)$$

$$y_{10} c_1 + y_{20} c_2 + \ldots + y_{n0} c_n = z^* \qquad (3·17)$$

என்று எழுதலாம். $z_0 < z^*$ என நிரூபிக்கின்றோம்.

அனைத்து j-க்கும் $z_j - c_j < 0$ என்பதால் ஒவ்வொரு c_j-க்கும் (**3·17**)-ல் z_j-ஐ ஈடு செய்தால்

$$y_{10} z_1 + y_{20} z_2 + \ldots + y_{n_0} z_n < z^* \qquad (3·18)$$

என்றாகிறது. (**3·10**) - இலிருந்து (3·**16**) - ல் P_j - க்களுக்கு ஈடு செய்தால்

$$y_{10}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{i1} P_i\right) + y_{20}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{i2} P_i\right) + \ldots$$

$$\ldots + y_{n_0}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{in} P_i\right) = P_0$$

அதாவது,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_{j0}\ x_{1j}\right) P_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_{j0}\ x_{2j}\right) P_2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} y_{j0}\ x_{mj}\right) P_m = P_0 \qquad (3.19)$$

என்று கிடைக்கிறது.

இம்மாதிரியே (3·11) – இலிருந்து z_j–ன் மதிப்புகளை (3·18)–ல் ஈடு செய்தால்,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_{j0}\ x_{ij}\right) c_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_{j0}\ x_{2j}\right) c_2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} y_{j0}\ x_{mj}\right) c_m < z^* \qquad (3.20)$$

என்ற சமனின்மை கிடைக்கிறது.

ஆனால், $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்பன தம்முள் ஒரு படிச் சாரா வெக்டர்கள் என்பதாலும், (3.8), (3.19) – களிலிருந்து பெறப்படும் P_0 - ன் விரிவுகள் ஒன்றே என்பதாலும்,

$$x_{i0} = \sum_{j=1}^{n} y_{j0}\ x_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m$$

என்பது தெளிவாகிறது. எனவே, (3.20) - இலிருந்து

$$x_{10}\, c_1 + x_{20}\, c_2 + \ldots + x_{m0}\, c_m < z^*$$

என்றும், (3.9) - இலிருந்து $z_0 < z^*$ என்றும் கிடைக்கிறது. தேற்றத்தின் நிரூபணம் நிறைவு பெறுகிறது.

குறிப்பு : தேற்றம் (3.2) - ன் நிரூபணத்திற்குத் தீர்வு கேடுறாதது என்ற தற்கோள் தேவைப்படவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

தேற்றங்கள் (3.1), (3.2) - களிலிருந்து ஓர் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு கொடுக்கப்பட்டால் அதிலிருந்து தொடங்கிப் படிப் படியாக புது அடிப்படை செய்தக்க தீர்வுகளைப் பிறப்பித்துக் கொண்டே சென்றால் இறுதியில் இத்தீர்வுகள் மீச்சிறு அடிப்படைச்

செய்தக்க தீர்வுக்கு ஒடுங்கவேண்டும் என்றும், அவ்வாறு ஒடுங்க வில்லை யெனின் முடிவுள்ள தீர்வு (finite solution) இருக்கமுடியாது என்றும் அறிகிறோம். சென்ற பகுதியின் (§ 3.1) எடுத்துக் காட்டு களைத் திரும்பப் படித்தால் இத்தேற்றங்களின் முக்கியத்துவம் புலனாகும்.

மீச்சிறு தீர்வுக்கு ஒடுங்கவேண்டும் என்பதற்காகவே அடிப் படைத்தீர்வுகளை கேடுறுத் தீர்வுகளாக எடுத்துக்கொண்டோம். இவ் வாறு எடுத்துக்கொள்ளாவிடில் x_{i0} ($i=1, 2, ..., m$) என்பனவற்றுள் ஒன்றாவது பூச்சியம் ஆகிவிடும். ஆகவே, $\theta_0 = 0$ என்று ஆகும். குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பில் மாற்றம் கிடைக்காது. மீச்சிறு மதிப்பை நோக்கிச் செல்லும் நமது முயற்சியில் முன்னேற்றம் ஏதும் இராது. இதைத்தான் 'சுழற்சி நிலை' என்று சென்றபகுதியின் இறுதியில் கூறினோம். நடை முறைக் கணக்கீட்டில் அடிப்படைத் தீர்வில் m - ஐ விடக் குறைந்த பூச்சியமல்லாத மூலகங்கள் இருப்பதைக் கொண்டும் (அல்லது) ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட i - க்கு $x_{ij} > 0$ என்னும் போது $\theta_0 = \underset{i}{\text{மீச்சிறுமம்}} (x_{i0}/x_{ij})$ என்று ஆகும் போதும் கேடுறுத் தன்மை பிர்ச்சினையில் வந்து விட்டதை உணர்ந்தறியலாம்.

தேற்றம் (3.2) - ல் மீச்சிறு தீர்விற்கான கட்டுப்பாடுகளைக் கூறினோம். $z_j - c_j$-க்களைக் காண்பதற்குப் பதிலாக ($c_j - z_j$)-க்களைக் கண்டு $\underset{j}{\text{மீச்சிறுமம்}} (c_j - z_j)$ - க்குச் சரியான வெக்டரை அடிப் படையில் உட்புகுத்துவதற்குத் தேர்ந்தெடுத்திருக்கலாம். எல்லா $c_j - z_j$-க்களும் குறையல்லா எண்கள் என்னும்போது மீச்சிறு மதிப்புப் பெறப்படும். மீப்பெருமத் தீர்வு காண்பது பிரச்சினை யாயின் அதை மீச்சிறுமத்திற்கான பிரச்சினையாக மாற்றித் தீர்வு காணலாம். (§ 2.1-ன் குறிப்பைப் பார்க்கவும்) அல்லது, நேரிடையாகப் பின்வருமாறும் காணலாம்: $z_j - c_j$-க்களைக் கணக் கிடவும்; $\underset{j}{\text{மீச்சிறுமம்}} (z_j - c_j)$-க்குச் சரியான வெக்டரைப் புது அடிப் படையில் உட்புகுத்தப் பொறுக்கவும்; அனைத்து j-க்கும் $z_j - c_j \geqslant 0$ எனின் மீப்பெருமத்தீர்வு காணப்படுகின்றது. (மாற்று வழி: $c_j - z_j$ -க்களைக் கணக்கிடவும்; $\underset{j}{\text{மீப்பெருமம்}} (c_j - z_j)$ - க்குச் சரியான வெக்டரைப் புது அடிப்படையில் உட்புகுத்தப் பொறுக்கவும்; அனைத்து j-க்கும் $c_j - z_j \leqslant 0$ என்னும் நிலையில் மீப்பெருமத் தீர்வு காணப்படுகிறது). எலக்ட்ரானிக் கம்யூட்டர்களைப் பயன்படுத்தும் போது மேற்கண்ட முறைகளில் ஏதாவதொன்றையே எப்பொழுதும் கணக்கீட்டிற்கு வைத்துக் கொள்ள வேண்டும். இது கம்ப்யூட்டர் புரோகிராம் எழுதுவதில் எளிமையைக் கொடுக்கும்.

3.3 கணக்கீட்டு முறைகள் (Computational Techniques) :

அணிகளையும், வெக்டர்களையும் பயன்படுத்தாமல் எல்லா மாறி களையும் வெளிப்படையாக வைத்துக்கொண்டே கணக்கீடுகளைச் செய்யலாம். சிறு பிரச்சினைகளுக்கு கம்ப்யூட்டரின் உதவி இல்லா மலே இம்முறையினைப் பயன்படுத்தி எளிதாகத் தீர்வினைக் காண லாம். ஒவ்வொரு நிலையிலும் அடிப்படை மாறியாகவிருக்கும் எந்த x_i அடிப்படையல்லா மாறியாக மாற்றப்படுகிறது என்பது தெளி வாகப் புலனாகும். § 3.1 -ன் எடுத்துக்காட்டுகளில் இம் முறையைப் பின்பற்றினோம்.

$$x_j > 0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,,\; i=1, 2, \ldots m, j=1, 2\ldots, n \quad (3.21)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$x_0 = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c_n x_n \qquad (3.22)$$

என்ற (குறிக்கோள்) சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்பதே நமது பிரச்சினையாகும்.

ஏதாவதொரு நிலையில் $X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்பன அடிப்படை மாறிகளையும், X_{m+1}, X_{m+2}, $\ldots$, X_n அடிப்படையல்லா மாறி களையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். இங்கு $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - களின் ஏதோவொரு வரிசை மாற்றம் (permutation) எனக் கொண்டோம். கட்டுப்பாடுகள் (3.21) குறிக் கோள் சார்பு (3.22) – ஆகியவற்றை அடிப்படையல்லா மாறிகள் மூலமாக பின்வருமாறு தெரிவிக்கலாம்:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= x_{i0} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{ij}\,(-X_{m+j}),\; i=1,2,\ldots, m \\ x_0 &= x_{00} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{0j}\,(-X_{m+j}) \end{aligned}\right\} \quad (3\cdot 23)$$

இங்கு x_{ij}; $i = 0, 1, 2, \ldots m$; $j = 1, 2, \ldots n-m$ என்பன a_{ij}, b_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots m, j = 1, 2, \ldots, n)$ ஆகியவற்றைச் சார்ந்தனவாகும். சமன்பாடுகள் (3.21) - ன் இடதுபுறம் உள்ள மாறிகள் சமன்பாடுகள் (3.23) - ல் வலதுபுறம் மாற்றப்பட்டிருப்ப தால் சில அனுகூலங்களை முன்னிட்டு அவற்றைக் குறைக் குறி யுடனேயே வலதுபுறம் காட்டியிருக்கிறோம்.

சமன்பாடுகள் (3·23)-ல் அடிப்படையல்லா மாறிகள் X_{m+j} $(j = 1, 2, \dots n - m)$, - களை பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்தால் $X_i = x_{io}$, $i = 1, 2, \dots m$ என்பன முதனிலைத்தீர்வு ஒன்றையும் $x_0 = x_{00}$ என்பது இத் தீர்வுக்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பையும் கொடுக்கின்றன. நாம் $x_{io} > 0$ என்று கொள்வோம். அதாவது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதனிலைத்தீர்வு செய்தக்க தீர்வு என்று கொள்கிறோம். முதனிலை செய்தக்க தீர்வு காணும் முறை பின்னர் விவரிக்கப்படும்.

முதற்கண் குறைக்கப் பட்டச்செலவுகள் x_{0j} – க்களை ஆராய்வோம். இவற்றை d_j என்றும் குறிப்பதுண்டு. எனவே, கம்ப்யூட்டர் புரோகிராம்களில் இவை $D\ J$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகின்றன. x_0 - ன் மீச்சிறு மதிப்புக் காணவேண்டும் என்பதால் முதலில் X_{m+j}-க்களுள் எந்த அடிப்படை மாறியை நீக்குவது என்பது தீர்மானிக்கப் படவேண்டும். X_{m+j}-ன் கெழு மிகக் குறையான எண் என்றால், மற்ற அடிப்படை மாறிகள் பூச்சியம் என்னும்போது x_0-ன் மதிப்புக்குறைவுறும்; அதாவது $- X_{m+j}$-ன் கெழுவான x_{0j} நிரம்பவும் மிகையான (most positive) எண்ணாக இருக்க வேண்டும். $j = k$ என்னும் போது இது நிகழ்வதாகக் கொள்வோம். (எல்லா x_{0j} - க்களுமே மிகையல்லா எண்கள் என்றால் எடுத்துக்கொண்ட தீர்வே மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வாகும்). இனி X_{m+k} – ஐ அடிப்படை மாறியாக மாற்ற வேண்டும். அதே போழ்து அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட வேண்டிய மாறியையும் தீர்மானிக்கவேண்டும். $x_{ik} > 0$ என்றுள்ள கெழுக்களுள் x_{i0}/x_{ik} என்னும் விகிதத்தின் மதிப்பு $i=l$ என்னும்போது மிகச் சிறியது எனக்கொள்வோம். x_{lk}-ஐ அடிப்படை மாற்றத்திற்கான மையவுறுப்பு (pivot element) என்கிறோம். எல்லா x_{ik}-களும் மிகையல்லா எண்கள் என்றால் என்ன செய்ய வேண்டும் என்பது பின்னர் கூறப்படும். ஒரு x_{ik}-ஆவது மிகையெண் என்று வைத்துக் கொள்வோம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட $j=k$·அல்லது $i=l$ காணப்படக் கூடுமானல் அவற்றுள் சிறிய அடிக்குறியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழக்கத்தை (convention) மேற்கொள்கிறோம். x_{lk} - ஐ மைய உறுப்பாகக் கண்ட பின்னர் X_l–ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் X_{m+k} ஐ அடிப்படை மாறியாகவும் மாற்றியமைக்கிறோம்.

$$X_l = x_{lo} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{lj} \left(- X_{m+j}\right)$$

என்பதிலிருந்து

$$X_{m+k} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-m} \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(-X_{m+j}) + \frac{1}{x_{lk}}(-X_l)$$

என்றும்,

$$X_j = x_{i0} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{ij}(-X_{m+j})$$

$$= x_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-m} x_{ij}(-X_{m+j}) + x_{ik}(-X_{m+k})$$

$$= x_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-m} x_{ij}(-X_{m+j})$$

$$-x_{ik}\left(\frac{x_{l0}}{x_{lk}} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} \frac{x_{lj}}{x_{lk}}(-X_{m+j}) + \frac{1}{x_{lk}}(-X_l)\right)$$

$$= \left(x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} x_{ik}\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-m} \left(x_{ij} - \frac{x_{ik}\, x_{lj}}{x_{lk}}\right)(-X_{m+j})$$

$$- \frac{x_{ik}}{x_{lk}}(-X_l) \qquad (3\cdot24)$$

தவிரவும்,

$$x_0 = x_{00} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{0j}(-X_{m+j})$$

$$= x_{00} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n-m} x_{0j}(-X_{m+j}) + x_{0k}(-X_{m+k})$$

$$= x_{oo} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{oj}(-X_{m+j}) + (-x_{ok}) \left\{ \frac{x_{lo}}{x_{lk}} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{lj}\,(-X_{m+j}) \right\}$$

$$= \left(x_{oo} - \frac{x_{ok}\;x_{lo}}{x_{lk}} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n-m} \left(x_{oj} - \frac{x_{ok}\,x_{lj}}{x_{lk}} \right)(-X_{m+j})$$

$$- \frac{x_{ok}}{x_{lk}}(-X_l) \qquad \textbf{(3·25)}$$

இப்பொழுது,

$$\begin{aligned} X_i &= X'_i \qquad (i \neq l) \\ X_l &= X'_{m+k} \\ X_{m+j} &= X'_{m+j} \qquad (j \neq k) \\ X_{m+k} &= X'_l \end{aligned}$$

என்று குறிப்போம். X'_1, X_2', ... X'_m புதிய அடிப்படை மாறிகள் ஆகும். $X_{m'+1}$, $X_{m'+2}$, ..., X'_n அடிப்படையல்லா மாறிகள் ஆகும். சமன்பாடுகள் (3.24), (3.25) - களை

$$\left. \begin{aligned} X'_i &= x'_{io} + \sum_{j=1}^{n-m} x'_{ij}\,(-X'_{m+j}) \\ x_o &= x'_{oo} + \sum_{j=1}^{n-m} x'_{oj}\,(-X'_{m+j}) \end{aligned} \right\} \qquad \textbf{(3·26)}$$

என்ற அமைப்பில் எழுதலாம். இங்கு

$$\left. \begin{aligned} x'_{lk} &= \frac{1}{x_{lk}} \\ x'_{lj} &= x_{lj}\;x'_{lk} \\ x'_{ik} &= -\,x_{ik}\;x'_{lk} \\ x'_{ij} &= x_{ij} - x_{ik}\;x'_{lj} \end{aligned} \right\} i \neq l\,;\, j \neq k \qquad \textbf{(3·27)}$$

அதாவது,

$$\left. \begin{aligned} x'_{lk} &= \frac{1}{x_{lk}} \\ x'_{lj} &= x_{lj}/x_{lk} \\ x'_{ik} &= -x_{ik}/x_{lk} \\ x'_{ij} &= x_{ij} - x_{jk}\,x_{lj}/x_{jk} \end{aligned} \right\} i \neq l;\; j \neq k. \qquad \textbf{(3.28)}$$

என்று எடுத்துக் கொள்கிறோம். சமன்பாடுகள் (3.27) அல்லது (3·28) - களிலிருந்து அடிப்படை மாற்றத்தில் மைய உறுப்பு x_{rk} ஆற்றும் பங்கு நன்கு புலப்படும். இந்த அறிமுறை (theoretical) வாய்பாடுகள் நிரைகளுக்கும் நிரல்களுக்கும் இடையேயுள்ள சமச்சீர் தன்மையையும் விளக்குகின்றன. இந்த இருமைப்பண்பு மேலும் பாடம் 4 - ல் விவரிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\left.\begin{array}{llllll} & & & x_i \geq 0, & i=1,2,\ldots,6 & \\ x_1 & & & -x_4 & \quad\;\; -2x_6 & =5 \\ & x_2 & & +2x_4 & -3x_5+\;\;x_6 & =3 \\ & & x_3 & +2x_4 & -5x_5+6x_6 & =5 \end{array}\right\}$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க,

$$x_1 + x_2 + x_3 \qquad = x_0 \text{ -ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்புக்காண்க. இம்மதிப்பைக் கொடுக்கும் தீர்வு என்ன?

x_4, x_5, x_6-களை அடிப்டையல்லா மாறிகளாகவும், x_1, x_2, x_3-களை அடிப்படை மாறிகளாகவும் கொண்டால் $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ என்ற செய்தக்க தீர்வு உடனடியாகக் கிடைக்கிறது. இத்தீர்விற்கு $x_0 = 13$ என்று ஆகிறது. இத்தீர்வை முதனிலைத் தீர்வாகக் கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி கிரமமாக x_0-ன் மதிப்பைக் குறைத்து மீச்சிறு தீர்வைக் காணலாம்.

பிரச்சினையை (3.23) அமைப்புக்குக் கொணர்ந்தால்,

$$\begin{aligned} x_0 &= 13 + 3(-x_4) - 8(-x_5) + 5(-x_6) \\ x_1 &= 5 - (-x_4) \qquad\qquad\qquad - 2(-x_6) \\ x_2 &= 3 + 2(-x_4) - 3(-x_5) + (-x_6) \\ x_3 &= 5 + 2(-x_4)\, 5 - (-x_5) + \boxed{6(-x_6)} \end{aligned}$$

என்று கிடைக்கிறது. x_0-ல் $(-x_6)$-ன் கெழு நிரம்பவும் மிகையாக இருப்பதால் x_6-ஐ அடிப்படை மாறியாக மாற்ற வேண்டும். அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட வேண்டிய மாறி $(-x_6)$-க்களின் மிகைக் கெழுக்கள் ஒத்த மாறிலி உறுப்புகளோடு கொண்டிருக்கும் விகிதத்தைக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்பட வேண்டும். x_2, x_3—களுக்கான சமன்பாடுகளில் தான் $(-x_6)$-ன் கெழுக்கள் மிகையாக உள்ளன. $(x_{ik} > 0)$. x_{i0}/x_{ik} என்ற விகிதங்கள் கணக்கில் 3/1, 5/6 ஆகும். இவற்றுள் மிகச்சிறியது 5/6 என்பதால் x_3-ஐ

அடிப்படையல்லா மாறியாக மாற்றுகிறோம். எனவே முதல் அடிப்படை மாற்றத்திற்கான மைய உறுப்பு x_3-க்கான சமன் பாட்டில் $(-x_6)$ - ன் கெழு 6 ஆகும். $(x_{lk} = 6;\ l = k = 3)$ (3·26), (3·27) - களிலிருந்து,

$$x_0 = \frac{53}{6} + \frac{8}{6}(-x_4) - \frac{23}{6}(-x_5) - \frac{5}{6}(-x_3)$$

$$x_1 = \frac{40}{6} + \frac{8}{6}(-x_4) - \frac{23}{6}(-x_5) + \frac{2}{6}(-x_3)$$

$$x_2 = \frac{13}{6} + \boxed{\frac{10}{6}(-x_4)} - \frac{13}{6}(-x_5) - \frac{1}{6}(-x_3)$$

$$x_6 = \frac{5}{6} + \frac{2}{6}(-x_4) - \frac{5}{6}(-x_5) + \frac{1}{6}(-x_3)$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. $(-x_4)$-ன் கெழு x_0-ல் மிகையாக இருப்பதாலும் 40/8, 13/10, 5/2 இவற்றுள் 13/10 மிகச் சிறியது என்பதாலும் x_2-க்கான சமன்பாட்டின் $(-x_4)$-ன் கெழு 10/6 அடுத்த அடிப்படை மாற்றத்திற்கான மைய உறுப்பு ஆகும். x_4 அடிப்படை மாறியாகவும் x_2 அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் மாற்றப்பட வேண்டும்.

முன்போலவே, வாய்பாடுகள் (3.27) - ஐப் பயன்படுத்தி

$$x_0 = \frac{71}{10} - \frac{8}{10}(-x_2) - \frac{21}{10}(-x_5) - \frac{7}{10}(-x_3)$$

$$x_1 = \frac{71}{10} + \frac{2}{10}(-x_2) - \frac{21}{10}(-x_5) + \frac{3}{10}(-x_3)$$

$$x_4 = \frac{13}{10} + \frac{6}{10}(-x_2) - \frac{13}{10}(-x_5) - \frac{1}{10}(-x_3)$$

$$x_6 = \frac{4}{10} - \frac{2}{10}(-x_2) - \frac{4}{10}(-x_5) + \frac{2}{10}(-x_3)$$

என்ற சமன் பாடுகளை அடிப்படை மாற்றத்திற்குப் பின் பெறலாம். இந்நிலையில் x_0 - ல் $-x_2$, $-x_5$, $-x_3$ என்பனவற்றின் கெழுக்கள் யாவுமே குறையெண்கள், அதாவது, மிகையல்லா எண்கள் என்பதால் இனியும் அடிப்படை மாற்றத்தின் மூலம் x_0 - ன் மதிப்பைக் குறைக்க இயலாது. எனவே, x_0-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{71}{10}$ ஆகும். இதைக் கொடுக்கும் தீர்வு $x_1 = \frac{71}{10}$, $x_2 = x_3 = 0$

$x_4 = \frac{13}{10}$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{4}{10}$ என்பதாகும்.

இந்தக் கணக்குப் பின்னர் § 7.4-ல் மூன்று வெவ்வேறு முறைகளிலும் போட்டுக்காட்டப்பட்டுள்ளது. அவற்றுள் முதலாவது இப்பொழுது கண்ட முறையைப் போன்றதே.

3.4 கணக்கீட்டு முறைகள் (தொடர்ச்சி) :

இந்தப்பகுதியில் அணிகள், வெக்டர்கள் இவற்றின் உதவி கொண்டு நேரியநெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கானதீர்வு காண்பதில் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை எங்ஙனம் செயல்படுத்தப்படுகிறது என்பதை ஆராய்கிறோம். இரு நிலைகளில் பிரச்சினையின் தீர்வை அணுகுகிறோம்:

(அ) தம்முள் ஒருபடிச் சாரா, செய்தக்க தீர்வைக் கொடுக்கும் m வெக்டர்களைப் பொறுக்கி அவற்றின் மூலமாக எல்லா வெக்டர்களையும் எழுத முடிந்தால் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்பது எப்படி ?

(ஆ) கணக்கில் கொடுத்துள்ள கட்டுப்பாடுகளுக்கான அணி A - ல் I_m-ஐ (m - பரிமாண ஓரலகு வெக்டரை) அமைக்கவல்ல வெக்டர்கள் வெளிப்படையாக (explicitly) உள்ளன என்றால், பிரச்சினைக்கான தீர்வு காண்பது எப்படி ?

நிலை (அ)-ல் $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்பன தம்முள் ஒருபடிச்சாரா m வெக்டர்கள் என்க, இவ்வெக்டர்கள் அமைக்கும் சதுர அணியை B என்று குறித்தால்

$$B = (P_1, P_2, \ldots\ldots, P_m)$$

ஆகும். இது ஏற்கவல்ல (admissible) அடிப்படை எனப்படும். இதற்குச் சரியான தீர்வு வெக்டரைக்காணவும், மற்ற வெக்டர்களை

அடிப்படை வெக்டர்கள் மூலம் தெரிவிக்கவும் முதலில் B^{-1} - ஐக் காணவேண்டும். முதனிலை அடிப்படைத் தீர்வு X_0 என்றால்,

$$BX_0 = P_0$$

ஆகும். எனவே,

$$X_0 = B^{-1} P_0$$
$$X_j = B^{-1} P_j$$

என்று கிடைக்கின்றன. இங்கு

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots\ldots x_{m0}),\ x_{i0} > 0$$
$$X_j = (x_{1j}, x_{2j} \ldots \ldots, x_{mj})$$

என்பன நிரல் வெக்டர்களாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டன. சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தொடங்குவதற்கு முன் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்ட அணியின் நிரல் வெக்டர்களைப் பிரித்து

$$(P_0 \mid P_1 P_2 \ldots\ldots P_m \mid P_{m+1} \ldots P_n)$$

அல்லது

$$(P_0 \mid B \mid P_{m+1} \ldots P_n)$$

என்று எழுதுகிறோம். இப்பிரிப்பு அணியின் உறுப்புகளை B^{-1} ஆல் பெருக்கினால்

$$(B^{-1}P_0 \mid B^{-1} B \mid B^{-1} P_{m+1} \ldots\ldots B^{-1} P_n)$$

அல்லது

$$(X_0 \mid I_m \mid X_{m+1} \ldots\ldots, X_n)$$

என்ற பிரிப்பு அணி கிடைக்கிறது. (§1.5-ஐப் பார்க்கவும்.) c_j-க்கள் தெரியுமாதலால் $z_j - c_j$-க்களைக் கணக்கிடுகிறோம். ஏதாவது j-க்கு $z_j - c_j > 0$ என்று வருகிறதா எனப்பார்க்கிறோம். அம்மாதிரியிருந்தால் தேற்றம் (3.1)-ல் கூறியபடி கணக்கீடு செய்கிறோம். எந்த j-க்கும் $z_j - c_j > 0$ என்னுமாறு இல்லையென்றால் X_0 என்பதே மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வாகும்.

குறிப்பு: பொதுவாக m வெக்டர்களின் தொகுப்பு தம்முள் ஒரு படிச்சாரா வெக்டர்களைக் கொடுப்பதற்கான உத்தரவாதம் ஏதும் கிடையாது. மேலும் அப்படியே கொடுத்தாலும் அவ்வெக்டர்கள் செய்தக்க தீர்வு ஒன்றைக் கொடுக்க வேண்டும் என்ற கட்டாயமும் இல்லை. எனவே நடைமுறையில் முறை (அ)-ஐப்பின்பற்ற வேண்டிய வாய்ப்புகள் இரா.

நிலை (ஆ) அடிக்கடி நிகழவல்லது. எனவே இதை விரிவாக ஆராய்கிறோம். $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ என்ற வெக்டர்களுள் m வெக்டர்களைச் சேர்த்து ஒரு $m \times m$ ஓரலகு அணியை உருவாக்கலாம் என்பது தற்கோள் ஆகும். கொடுத்துள்ள அணியில் இம்மாதிரி வெக்டர்கள் இல்லையென்றால் புதிதாகச் சில மாறிகளைப் புகுத்தி அந்த அணியை விரிவுபடுத்தி ஓர் ஓரலகு $m \times m$ அணிவருமாறு எழுதக்கூடும் (இதை பிறிதொரு பகுதியில் விளக்குகிறோம்.) என்பதால் இந்தக் கட்டுப்பாடு கணக்கீடுகளை அதிகம் பாதிப்பதில்லை. ஓரலகு அணியை உருவாக்கும் வெக்டர்கள் $P_1, P_2, \ldots\ldots P_m$ என்க. எனவே, இந்நிலையில்

$$B = (P_1\ P_2\ \ldots\ P_m) = I_m$$

ஓர் ஏற்கவல்ல அடிப்படையாகிறது. மேலும் $B^{-1} = I_m$ என்பதால் முதனிலை கோடிப்புள்ளித் தீர்வு $X_0 = P_0$ என்றும் $X_j = P_j$ என்றும் கிடைக்கின்றன. இங்கு X_0, X_j என்பவற்றை நிலை (அ)-ல் கூறியது போலவே எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தொடங்குவதற்கு அட்டவணை (3.1)-ல் காட்டியபடி கணக்கின் அணியை எழுதுகிறோம். இதில் ஓரலகு வெக்டர்கள் எளிமைக்காக ஒரு சேர எழுதப்பட்டுள்ளன. ஆனால் மீச்சிறு தீர்வு காண இம்மாதிரித்தான் எழுத வேண்டும் என்பது கிடையாது.

§2.1-ல் வரையறை செய்யப்பட்ட பிரச்சினையின் குறியீட்டினைப் பின்பற்றி $X_0 = b$ என்று எடுத்துக் கொள்கிறோம். அட்டவணையில் $a_{ij} = x_{ij}$, $(i > m, j > m)$ என்றும் $1 \leqslant i,\ j \leqslant m$ என்றால் $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $a_{ii} = 1$ என்றும் கொண்டுள்ளோம். $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ மதிப்புகளுக்கு z_j காண P_j என்ற நிரை வெக்டருக்கும் c என்ற நிரல் வெக்டருக்குமான உட்பெருக்கலைக் கணக்கிடுகிறோம். அடிப்படையில் உள்ள m வெக்டர்கள் P_j $(j = 1, 2, \ldots\ldots m)$-க்கும் $c\,P_j = c_j$ என்பதால் $z_j - c_j = 0, j = 1, 2, \ldots m$ என்று அறிக. z_0, $z_j - c_j$ -க்களை $(m+1)$ - ஆவது நிரையாக அட்டவணையில் எழுதியுள்ளோம்.

தவிரவும்,

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i\ x_{i0} = c\ P_0$$

அட்டவணை (3·1)

				c_1	c_2	·	c_l	·	c_m	c_{m+1}	·	·	c_j	·	c_k	·	c_n
i	அடிப்படை	c	P_0	P_1	P_2	·	P_l	·	P_m	P_{m+1}	·	·	P_j	·	P_k	·	P_n
1	P_1	c_1	x_{10}	1	0	·	0	·	0	$x_{1,m+1}$	·	·	x_{1j}	·	x_{1k}	·	x_{1n}
2	P_2	c_2	x_{20}	0	1	·	0	·	0	$x_{2,m+1}$	·	·	x_{2j}	·	x_{2k}	·	x_{2n}
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
l	P_l	c_l	x_{l0}	0	0	·	1	·	0	$x_{l,m+1}$	·	·	x_{lj}	·	$\boxed{x_{lk}}$	·	x_{ln}
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
m	P_m	c_m	x_{m0}	0	0	·	0	·	1	$x_{m,m+1}$	·	·	x_{mj}	·	x_{mk}	·	x_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	·	0	·	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	·	·	z_j-c_j	·	z_k-c_k	·	z_n-c_n

சிம்ப்ளக்ஸ் கணக்கிட்டின் முதனிலை அட்டவணை

(Initial tableau for simplex algorithm)

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = c P_j, \ j = 1, 2, \ldots\ldots n$$

என்ற தொடர்புகளிலிருந்து $(m+1)$- ஆவது நிரையைப் பூர்த்தி செய்யலாம். எல்லா $z_j - c_j \ (j = 1,2\ldots\ldots n)$ மிகையல்லா எண்கள் என்றால்

$$X_o = (x_{10}, x_{20}, \ldots\ldots, x_{mo}) = (b_1, b_2, \ldots, b_m) = b$$

தான் பிரச்சினையின் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு ஆகும். இத்தீர்விற்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு z_o ஆகும்.

ஒரு $z_i - c_j$ ஆவது மிகை எண் என்க. $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்ற வெக்டர்களுள் $(m-1)$ வெக்டர்களை இருத்திக்கொண்டு எஞ்சிய வெக்டருக்குப் பதில் புது வெக்டர் ஒன்றைப் புகுத்தி புதிய தீர்வு காண்கிறோம். எந்த வெக்டரை உட்புகுத்துவது என்பது தீர்மானிக்கப்பட வேண்டும். அறிமுறையில் $z_j - c_j > 0$ என்ற சமனின்மையைக் கொடுக்கும் எந்த வெக்டர் P_j யையும் புது அடிப்படையில் நுழைக்கலாம். ஆனால் நடைமுறையில் பின்வரும் விதிப்படி P_j ஐப் பொறுக்குவதால் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டிய தடவைகளின் எண்ணிக்கை வெகுவாகக் குறைக்கப்படலாம் என்று டான்சிக் (Dantzig) கூறுகிறார்.

விதி: உடனடியாக குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பில் மீப்பெரு இறக்கத்தைத் தரவல்லதும் $z_j - c_j > 0$ என்று உள்ளதுமான P_j-யைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்.

$$\text{அதாவது, மீப்பெருமம்}_{j} \left\{ (z_j - c_j) \ \text{மீச்சிறுமம்}_{i,\, x_{ij} > 0} \frac{x_{io}}{x_{ij}} \right\}$$

என்பதற்கிணங்க P_j தேர்ந்தெடுக்கப்படவேண்டும்.

பல மதிப்புகளுக்கு $z_j - c_j > 0$ என்றிருக்குமானால் இந்த விதி நிரம்பச் சிக்கலைக் கொடுக்கும். எனவே நடைமுறையில் $z_j - c_j$-ன் மீப்பெருமத்திற்குச் சரியான P_j-ஐஉட்புகுத்துகிறோம். இந்தத் திருத்தப்பட்ட விதிப்படியும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட P_j-க்கள் இருக்குமானால் அடிக்குறி சிறியதாக (பெரிதாக) உள்ள P_j-ஐ எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும் என்னும் வழக்கத்தைக் கைக் கொள்கிறோம். பல கணக்கீட்டு நிலையங்களில் (computational centres) இந்த விதியையேபின் பற்றுகிறார்கள். சாதாரணமாக, இந்த விதியைப் பின்பற்றுவதால் முதனிலை செய்தக்க தீர்விலிருந்து மீச்சிறு தீர்வையடைய ஏறத்தாழ m தடவைகள் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் திரும்பத் திரும்ப

பயன்படுத்த வேண்டியுள்ளது. இந்தப் புத்தகத்தில் நாம் இவண் விவரிக்கப்பட்ட இத் திருத்தப்பட்ட விதியையே பயன்படுத்து கிறோம்.

இனி, $\underset{j}{\text{மீப்பெருமம்}} (z_j - c_j) = z_k - c_k > 0$ என்க. எனவே, P_k-ஐ அடிப்படை வெக்டராக மாற்றுகிறோம். அடுத்து எந்த வெக்டரை நடைமுறை அடிப்படையிலிருந்து நீக்க வேண்டும் என்பது தீர்மானிக்கவேண்டும். இதற்கு,

$$\theta_0 = \underset{i,\, x_{ik} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \frac{x_{io}}{x_{ik}}$$

கணக்கிடப்பட வேண்டும். எல்லா x_{ik}-களும் மிகையல்லா எண்கள் என்றால் தேற்றம் (3.1) நிலை (*ii*)-ன் படி குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பை எவ்வளவு வேண்டுமானாலும் சிறிதாக்கும் செய்தக்க தீர்வு காணப்படக்கூடும். எனவே, நமது கணக்கீடு முடிவுறும். ஆகவே, ஒரு x_{ik} - ஆவது மிகை எண் எனக் கொள்வோம். மேலும்,

$$\theta_0 = \underset{i,\, x_{ik} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \frac{x_{io}}{x_{ik}} = \frac{x_{lo}}{x_{lk}}$$

என்க. P_l என்ற வெக்டரை அடிப்படையிலிருந்து நீக்கிவிட்டு P_k-ஐ உட்புகுத்துகிறோம். புதிய அடிப்படை வெக்டர்கள் $P_1, P_2, \ldots P_{l-1}, P_k, P_{l+1} \ldots P_m$ ஆகும்.

புதிய அடிப்படையைக் கண்ட பிறகு இந்த அடிப்படையில் இல்லாத ஒவ்வொரு வெக்டரையும் இவ்வடிப்படை வெக்டர்களின் மூலமாக தெரிவிக்க வேண்டும். முதனிலை அடிப்படை $(P_1\, P_2 \ldots P_m) = I_m$ என்பதால் எல்லா P_j-க்களையும் இந்த அடிப் படையின் மூலம் உடனடியாக எழுதிவிடலாம். உண்மையில்

$$P_0 = x_{10}P_1 + x_{20}\, P_2 + \ldots + x_{lo}\, P_l + \ldots + x_{mo}\, P_m \qquad (3.29)$$

$$P_k = x_{1k}\, P_1 + x_{2k}\, P_2 + \ldots + x_{lk}\, P_l + \ldots + x_{mk}\, P_m \qquad (3.30)$$

$$P_j = x_{1j}\, P_1 + x_{2j}\, P_2 + \ldots + x_{lj}\, P_l + \ldots + x_{mj}\, P_m \qquad (3.31)$$

என்ற தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன. சமன்பாடு (3.30)-இலிருந்து

$$P_l = \frac{1}{x_{lk}} (P_k - x_{1k}\, P_1 - x_{2k}\, P_2 - \ldots - x_{mk} P_m)$$

அதாவது,

$$P_l = \frac{1}{x_{lk}}\left(P_k - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{m} x_{ik}\, P_i\right) \qquad (3\cdot32)$$

என்று கிடைக்கிறது. இந்த மதிப்பை (3.29)-ல் P_l-க்கு ஈடு செய்தால்

$$P_0 = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{m}\left(x_{i0} - \frac{x_{ik}\; x_{l0}}{x_{lk}}\right) P_i + \frac{x_{l0}}{x_{lk}} P_k$$

(இச்சமன்பாட்டை (3.13) உடன் ஒப்புநோக்குக) எனவே, புதிய செய்தக்க தீர்வு

$$X_0^* = (x^*_{10}, \ldots x^*_{l-1,0}\; x^*_{k0}, x^*_{l+1,0} \ldots\; x^*_{m0}),\; x^*_{i0} > 0$$

என்பதாகும். இதையே

$$P_0 = \sum_{i=1}^{l-1} x^*_{i0}\, P_i + x^*_{k0}\; P_k + \sum_{i=l+1}^{m} x^*_{i0}\, P_i$$

என்றும் எழுதலாம். இங்கு

$$\left.\begin{aligned} x^*_{i0} &= x_{i0} - \frac{x_{l0}\; x_{ik}}{x_{lk}},\; i=1,2,\ldots,l-1,\, l+1,\ldots,m \\ x^*_{k0} &= \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot33)$$

இம்மாதிரியே சமன்பாடு (3.32)-இலிருந்து (3.31)-ல் ஈடுசெய்து புதிய அடிப்படை வெக்டர்கள் மூலமாக

$$P_j = \sum_{i=1}^{l-1} x^*_{ij}\, P_i + x^*_{kj}\, P_k + \sum_{i=l+1}^{m} x^*_{ij}\; P_i$$

என்று எழுதலாம். இங்கு,

$$\left.\begin{aligned} x^*_{ij} &= x_{ij} - \frac{x_{lj}\; x_{ik}}{x_{lk}} \qquad (i \neq l) \\ x^*_{kj} &= \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot34)$$

ஆகும். புதிய அடிப்படைக்கு z^*_0, z^*_j -களை முந்திய அடிப்படைக்கு வரையறுத்தது போலவே வரையறுத்தால் [சமன்பாடுகள் **(3.9) (3.11)**-களைப் பார்க்கவும்]

$$z_j^* = \sum_{i=1}^{l-1} x^*_{ij}\, c_i + x^*_{kj}\; c_k + \sum_{i=l+1}^{m} x^*_{ij}\, c_i$$

$$z_0^* = \sum_{i=1}^{l-1} x^*_{i0}\, c_i + \; x^*_{k0}\, c_k + \sum_{i=l+1}^{m} x^*_{i0}\, c_i$$

என்று கிடைக்கும். எனவே x^*_{ij}, x^*_{i0}–களுக்கு முறையே **(3.34)**, **(3.33)**–களிலிருந்து ஈடு செய்தால்,

$$\left. \begin{aligned} z_j^* - c_j &= z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}}\,(z_k - c_k) \\ z_0^* &= z_0 - \frac{x_{l0}}{x_{lk}}(z_k - c_k) \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

என்ற தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

ஆகவே, புதுத்தீர்வு X_0^*-ஐப் பெற புது வெக்டர்கள் X_j^*-களும் அவற்றிற்குச் சரியான $z^*_j - c_j$-க்களும் அட்டவணை **(3.1)**-ல் உள்ள மூலகங்கள் x_{ij}-களும் $(i = 1, 2, \ldots m + 1;\; j = 0, 1, 2, \ldots n)$ பின்வரும் வாய்பாடுகளால் மாற்றப்படுகின்றன.

$$\left. \begin{aligned} x^*_{ij} &= x_{ij} - \frac{x_{lj}\, x_{ik}}{x_{lk}} \qquad (i \neq l) \\ x^*_{lj} &= \frac{x_{lj}}{x_{lk}};\; i = 1, 2, \ldots, m + 1;\; j = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

இங்கு,

$$z^*_0 = x^*_{m+1,\,0}; \quad z^*_j - c_j = x^*_{m+1,\,j}$$

இந்த மாற்று-வாய்பாடுகளை அட்டவணை(3.1)-ல் உள்ள எல்லா மூலகங்களுக்கும் [P_0 உள்ள நிரல், $(m+1)$ - வது நிரை உட்பட] பயன்படுத்துகிறோம். x_{lk} என்ற மூலகத்தை மாற்றத்தின் மையமாகக்கொண்ட முழு நீக்க வாய்பாடுகள் சமன்பாடுகள் **(3.36)** - க்குச் சமமாகும்.

அட்டவணையைப் பற்றிய ஒரு சில பண்புகள் நோக்கத் தக்கன. *i*, *l* என்ற அடிக்குறிகள் *i*-வது, *l*-வது நிரைகளைக்

குறிக்கின்றன. எந்த மாறிகள் நடைமுறை அடிப்படைத் தீர்வில் உள்ளன என்பது "அடிப்படை" என்ற தலைப்பைப் பெற்ற நிரலால் தெரிவிக்கப்படும். சமன்பாடுகள் (3.36) தரும் மாற்று வாய்பாடுகள் அட்டவணையின் ஒவ்வொரு உறுப்பு x_{ij} -க்கும் (i-நிரை எண், j நிரல் எண்) பொருந்தும். x_{lk} — l-வது நிரை, k-வது நிரல் கொடுக்கும் — உறுப்பு மாற்றத்தின் மையமாகும். நேரிடைக் கணக்கீடுகளில் சமன்பாடுகள் (3.36)-ஐப் பயன்படுத்தும் போது முதலில் மைய நிரையின் (pivotal row) புது உறுப்புக்களைக் கண்டு இந்த நிரையின் உரிய மடங்குகளை அட்டவணையின் மற்ற நிரைகளோடு கூட்டவேண்டும். இதன் மூலம் x_{k_0} l-வது நிரையைத் தவிர மற்ற நிரைகளிலிருந்து நீக்கப்படுகிறது. எலக்ட்ரானிக் கம்ப்யூட்டர் மூலம் தானியங்கு முறையில் கணக்கீடு செய்யும் போது முதலில் x_{ik}/x_{lk} என்ற மைய உறுப்போடு தொடர்பு கொண்ட விகிதங்களைக் கண்டு, பின்னர் ஒவ்வொரு நிரலையும் சமன்பாடுகள் (3.36)-களில் கூறிய நீக்க மாற்றங்களுக்கு உட்படுத்த வேண்டும். z_j-c_j என்ற எண்களை ஒவ்வொரு நிரலினுடையவும் முதல் உறுப்பாக [நாம் எடுத்துகொண்ட மாதிரி $(m+1)$-வது நிரையில் இல்லாதவாறு] எடுத்துக் கொள்வதும் உண்டு.

சமன்பாடுகள் (3.36)-ஐ சமன்பாடுகள் (3.27), (3.28)-களுடன் ஒப்பிடுக. திருப்பு அணிக்கான குறியீட்டைக் கொண்டு குழப்பமடையக் கூடாது என்பதற்காக "ι" என்பதற்குப்பதில் "*" என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி யிருக்கிறோம். மற்றபடி எந்தவித மாற்றமும் இல்லை.

முதனிலை கணக்கீடு அட்டவணை அமைக்கப்பட்டவுடன் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் பின்வருவன திரும்பத் திரும்பச் செயல்படுத்தப்படவேண்டும்.

(i) $z_j - c_j$ என்ற உறுப்புக்களைச் சோதித்து மீச்சீறு தீர்வு அடையப்பட்டதா எனப் பார்க்கவேண்டும். அதாவது, எல்லா $z_j - c_j$-க்களும் மிகையல்லா எண்கள்தானா என அறியவேண்டும்.

(ii) ஏதாவதொரு j-க்கு $z_j-c_j>0$ என்றால் அடிப்படை மாற்றத்தினால் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பைக் குறைக்கலாம் என அறிந்து எந்த வெக்டரை புது அடிப்படையமைக்கப் புகுத்துவது எனத் தீர்மானிக்க மீப் பெரு மிகை மதிப்பு பெற்ற z_j-c_j-ஐக் காணவேண்டும். இது z_k-c_k என்க.

(*iii*) புதுத் தீர்வின் செய்தகு தன்மையை உறுதிப்படுத்தும் வகையில் பழய அடிப்படை வெக்டர்களுள் நீக்கப்பட வேண்டிய வெக்டரைத் தீர்மானிக்க வேண்டும். அதாவது $x_{ik} > 0$ என்றுள்ள x_{ik}-களுக்கு x_{i0}/x_{ik} கண்டு, அவற்றுள் மீச்சிறு விகிதத்தைக் காண வேண்டும். இது x_{l0}/x_{lk} என்க. x_{lk} அடுத்த மாற்றத்திற்கு மைய உறுப்பு எனப் படும். எல்லா i க்கும் $x_{ik} \leqslant 0$ என்றால் தீர்வு வரம்பு இல்லாதது.

(*iv*) அட்டவணையின் உறுப்புகளை முழு நீக்க முறைப்படி சமன்பாடுகள் (**3.36**)-ஐப் பயன்படுத்தி மாற்றி அமைத்து புதுத் தீர்வையும் அதனுடன் தொடர்பு பெற்ற உறுப்பு களையும் காணவேண்டும்.

இந்த முறையினால் கிடைக்கும் x_{ij}^*-கள் என்னும் புதுமூலகங் கள் அட்டவணை (**3.2**)-ல் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. செயல் முறைகள் (*i*) தொடக்கம் (*iv*)-க்கு இந்த அட்டவணையை உட்படுத்தி புதிய அட்டவணை யொன்றைப் பெறலாம் இம்மாதிரியே திரும்பத் திரும்பச் செய்யும்போது தேற்றங்கள் (**3.1**), (**3.2**)]-களின்படி ஒரு சில தடவைகளுக்குப் பின்னர் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கிறது. அதாவது, செயல்முறை (*i*)-க்குப் பிறகு தொடர வேண்டிய வாய்ப்பில்லாமல் அனைத்து $z_j - c_j$-க்களும் மிகையல்லா எண்கள் ஆகிவிடுகின்றன.

ஒவ்வொரு மாற்றத்திலும் அடிப்படை வெக்டர்களின் அணி கோவையையும் எளிதாகக் கணக்கிடலாம். சிம்ப்ளக்ஸ் முறையை p-வது முறைச் செயல்படுத்தும்போது அடிப்படை வெக்டர்கள் $P_1, P_2 \ldots, P_m$ என்றும்,

$$B_p = (P_1 \; P_2 \; \ldots \; P_m)$$

என்றும் எழுதுவோம். அடுத்து வரும் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப் பிரயோகத்தில் P_l என்ற வெக்டரின் இடத்து P_k என்ற வெக்டர் நுழைக்கப்படுகிறது என்றும்

$$B_{p+1} = (P_1 \; P_2 \ldots P_{l-1} \; P_k \; P_{l+1} \ldots P_m)$$

என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும், இங்கு

$$P_k = \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \; P_i$$

என்க. C_p என்ற அணி m பரிமாண ஓரலகு அணி I_m-ல் l-வது நிரல்

அட்டவணை (3·2)

				c_1	c_2	·	c_l	·	c_m	c_{m+1}	·	·	c_j	·	c_k	·	c_n
i	அடிப்படை	c	P_0	P_1	P_2	·	P_l	·	P_m	P_{m+1}	·	·	P_j	·	P_k	·	P_n
1	P_1	c_1	x^*_{10}	1	0	·	x^*_{1l}	·	0	$x^*_{1,m+1}$	·	·	x^*_{1j}	·	0	·	x^*_{1n}
2	P_2	c_2	x^*_{20}	0	1	·	x^*_{2l}	·	0	$x^*_{2,m+1}$	·	·	x^*_{2j}	·	0	·	x^*_{2n}
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
l	P_k	c_k	x^*_{k0}	0	0	·	x^*_{ll}	·	0	$x^*_{l,m+1}$	·	·	x^*_{lj}	·	1	·	x^*_{ln}
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
m	P_m	c_m	x^*_{m0}	0	0	·	x^*_{ml}	·	1	$x^*_{m,m+1}$	·	·	x^*_{mj}	·	0	·	x^*_{mn}
$m+1$	·	·	z^*_0	0	0	·	$z_l^* - c_l$	·	0	$z^*_{m+1} - c_{m+1}$	·	·	$z^*_j - c_j$	·	0	·	$z^*_n - c_n$

சிம்ப்ளக்ஸ் கணக்கீட்டின் இரண்டாம் நிலை அட்டவணை

x^*_{ij}-கள் வாய்பாடுகள் (3.36)-இல் இருந்து பெறப்படுகின்றன.

உறுப்புக்களை முறையே x_{ik}, $i=1, 2 \ldots m$ என்ற உறுப்புகளாக மாற்றக் கிடைக்கிறது என்போம். எனவே,

$$B_{p+1} = B_p\, C_p = B_p \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots & x_{1k} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 \ldots & x_{2k} & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & x_{lk} & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & x_{mk} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \longrightarrow l \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(நிரல் l ↑)

ஆகையால்,

$$|B_{p+1}| = |B_p|\,|C_p| = x_{lk}\,|B_p|$$

முதனிலையில் தம்முள் ஒருபடிச்சாரா m அடிப்படை வெக்டர்களை m-பரிமாண ஓரலகு அணியாக எடுத்துக்கொண்டிருப்பதால், $p=0$ என்னும்போது, $B_0 = I_m$ ஆகிறது. ஆகவே,

$$|B_1| = x_{lk}^{(1)}\,|B_0| = x_{lk}^{(1)}\,|I_m| = x_{lk}^{(1)};$$

$$|B_2| = x_{lk}^{(2)}\,|B_1| = x_{lk}^{(2)}\,x_{lk}^{(1)}$$

$$|B_3| = x_{lk}^{(3)}\,|B_2| = x_{lk}^{(3)}\,x_{lk}^{(2)}\,x_{lk}^{(1)},$$ இன்ன பிற. இங்கு

$x_{lk}^{(q)}$ என்பது q-வது அடிப்படை மாற்றத்தின் மைய உறுப்பாகும். தொடர்ந்து p தடவைகள் அடிப்படை மாற்றம் செய்யப்பட்டால்; p-வது தடவை மாற்றத்தின் அடிப்படை வெக்டர்கள் அமைக்கும் அணியின் அணிகோவை

$$|B_p| = \prod_{q=1}^{p} x_{lk}^{(q)}$$

எல்லா நிலைகளிலும் நாம் செய்தக்க தீர்வுகளையே பெறுவதால் $x_{lk}^{(q)} > 0$ என்பது எல்லா q மதிப்புகளுக்கும் உண்மையாக வேண்டும். எனவே, $|B_p| > 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு: §3.3-ல் கண்ட எடுத்துக்காட்டையே இந்தப் பகுதியில் விவரித்த முறைப்படி அணுகிப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு

காண்போம். முன்போலவே x_1, x_2, x_3-கள் அடிப்படை மாறிகளாக இருக்கும்போது செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கிறது என்பதைக் கவனித்துக் கொள்கிறோம். கட்டுப்பாடுகளின் கெழுக்களின் அணியில் P_1, P_2, P_3 என்ற வெக்டர்கள் 3 x 3 ஓரலகு அணியை அமைக்கின்றன. கணக்கீட்டிற்கான அட்டவணைகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகத் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை (3.3)

முதனிலை அட்டவணை :

				1	1	1	0	0	0	
i	அடிப்படை	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_1	1	5	1	0	0	—1	0	—2	
2	P_2	1	3	0	1	0	2	—3	1	
3	P_3	1	5	0	0	1	2	—5	[6]	→
			13	0	0	0	3	—8	5	
									↑	

$$\text{மீப்பெருமம்}_{j} \ (z_j - c_j) = z_6 - c_6; \quad k = 6$$

$$\underset{i,\ x_{i6} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(\frac{x_{i0}}{x_{i6}} \right) = \text{மீச்சிறுமம்} \left\{ \frac{3}{1}, \frac{5}{6} \right\} = \frac{5}{6} = \frac{x_{30}}{x_{36}}; l = 3$$

∴ மைய உறுப்பு $= x_{36} = 6$

அட்டவணை (3.3)-ஐ அட்டவணை (3.1) உடன் ஒப்பிடுக. அட்டவணைகள் (3.4), (3.5)-களில் அடுத்து வரும் நிலைகள் காட்டப்பட்டுள்ளன. மைய உறுப்புகள் சுழிக்கப்பட்டுள்ளன. உட்புகும் வெளியேறும் வெக்டர்கள் அம்புக்குறியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன. இறுதி நிலைக்கான அட்டவணையின் கடைசி நிரையில் $z_j - c_j$ $j = 1, 2, \ldots 6$ எல்லாம் மிகையல்லா எண்கள் ஆகிவிட்டதைக் கவனிக்கவும்.

அட்டவணை (3.4)

இரண்டாம் நிலை :

				1	1	1	0	0	0	
i	அடிப்படை	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_1	1	$\frac{40}{6}$	1	0	$\frac{2}{6}$	$-\frac{2}{6}$	$-\frac{10}{6}$	0	
2	P_2	1	$\frac{13}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\boxed{\frac{10}{6}}$	$-\frac{13}{6}$	0	→
3	P_6	0	$\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	
			$\frac{53}{6}$	0	0	$-\frac{5}{6}$	$\frac{8}{6}$	$-\frac{23}{6}$	0	
							↑			

$$\underset{j}{\text{மீப்பெருமம்}}\,(z_j - c_j) = z_4 - c_4;\ k = 4$$

$$\underset{i,\ x_{i4} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(\frac{x_{i0}}{x_{i4}}\right) = \text{மீச்சிறுமம்} \left\{\frac{13}{10},\ \frac{5}{2}\right\} = \frac{13}{10} = \frac{x_{20}}{x_{24}};\ l = 2$$

∴ மைய உறுப்பு $= x_{24} = \frac{10}{6}$

அட்டவணை (3.5)

மூன்றும் நிலை: இறுதி நிலை.

				1	1	1	0	0	0
i	அடிப்படை	C	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	1	$\frac{71}{10}$	1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{21}{10}$	0
2	P_4	0	$\frac{13}{10}$	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{13}{10}$	0
3	P_6	0	$\frac{4}{10}$	0	$-\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$-\frac{4}{10}$	1
			$\frac{71}{10}$	0	$-\frac{8}{10}$	$-\frac{7}{10}$	0	$-\frac{21}{10}$	0

$z_j - c_j \leqslant 0$, அனைத்து j-க்கும்

$z_0 = \frac{71}{10} =$ குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு.

3.5 செயற்கை மாறிகளும் முதனிலை செய்தக்க தீர்வும்—ஆர்டன் முறை (Artificial variables and initial feasible solution – Orden's Method) :

இதற்கு முந்திய பகுதியில் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக் குத் தீர்வு காணும்போது அதன் கட்டுப்பாடுகள் அணியில் தேவை யான பரிமாண ஓரலகு சதுர அணி இருக்கிறது என்றும் பிரச் சினைக்கு செய்தக்க முதனிலைத் தீர்வு இருக்கிறது என்றும் கொண்டோம். பொதுவாகப் பிரச்சினையை அமைக்கும் போது சரியான முறையில்கட்டுப்பாடுகளை எடுத்துக் கொண்டிருந்தால், அப்பிரச்சினைக்கு செய்தக்க தீர்வுகள் இருந்தே தீரும். ஆனால், அதன் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும் கெழுக்கள் அணி ஓர் ஓரலகு அணியைப் பெற்றிருக்க வேண்டும் என்ற தேவை இல்லை. எனவே, இந்த இரண்டாவது தற்கோளைத் தளர்த்திப் பிரச்சினையை ஆராயவேண்டிய தேவை ஏற்படுகிறது. ஆர்டன் என்பார் இதற்காகக் கண்ட முறை பிரச்சினைக்குத் தீர்வு இருக் கிறதா இல்லையா என்பதை நிர்ணயிப்பதுடன் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை யைப் பயன்படுத்துதற்கு உகந்தவாறு சில செயற்கை மாறிகளைப் புகுத்தி ஓர் ஓரலகு ;அணியை கட்டுப்பாடுகள் அணியில் கொணர வழி வகுக்கிறது. இனி இம்முறையை விவரிக்கிறோம்.

$$\left.\begin{aligned} x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\ldots n,& \\ a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots& \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (3{\cdot}37)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \ldots + c_n\,x_n$$

என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு காண்பதே நமதுபிரச்சினையாகும். கட்டுப்பாடுகளில் (தேவையானல் — 1–ஆல் இருபுறமும் பெருக்கி) $b_1, b_2, \ldots, b_m$-களை குறையல்லா எண்களாகக் கொள்ளலாம்.

ஆர்டன் முறையைத் தொடங்குவதற்கு x_{n+j}, $j = 1, 2, \ldots m$ என்ற m குறையல்லா மாறிகளைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒன்று வீதம் கட்டுப்பாடுகள் (3·37)-ல் புகுத்திப் பின்வருமாறு எழுதுகிறோம்:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + \ldots + a_{1n}\,x_n + x_{n+1} \qquad\qquad &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \ldots + a_{2n}\,x_n \qquad\qquad + x_{n+2} &= b_2 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots& \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots& \\ a_{m1}\,x_1 + \ldots + a_{mn}\,x_n \qquad\qquad + x_{n+m} &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (3{\cdot}38)$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, 2, \ldots, n+m.$$

குறிக் கோள் சார்பை,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + w x_{n+i} + \dots + w x_{n+m}$$

என்று எழுதுவோம். இங்கு w குறிப்பிடப்படாத ஒருபெரிய மிகை எண் ஆகும்.

இந்த நிலேயில் ஒரு சில விஷயங்களைத் தெளிவாக்கிக் கொள் வோம். ஒரு முதனிலே செய்தக்க தீர்வு கிடைக்க வேண்டுமாயின் எல்லா அடிப்படையல்லா மாறிகளும் பூச்சியமாக்கப்பட்டால் அடிப்படை மாறிகளின் மதிப்புகள் குறையல்லா எண்கள் ஆக வேண்டும். சில கட்டுப்பாடுகள் சமனின்மைகளாக இருந்தால் தொய்வு மாறிகளேக் கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ அக்கட்டுப் பாடுகளைச் சமன்பாடுகளாக்குகிறோம். பின்னர் இத்தொய்வு மாறிகளை அடிப்படை மாறிகளாக மாற்றி பிரச்சினைக்கு முதனிலேச் சோதனைத் தீர்வாக ஒரு செய்தக்க தீர்வைப் பெறலாம். ஆனல் சில சமன்பாடுகள் அல்லது சமனின்மைகள் எடுத்துக் கொண்ட சோதனைத் தீர்வுக்கு நிறைவு பெருமல் இருக்கலாம். இம்மாதிரி ஏற்படும் போது, அக்கட்டுப்பாடுகளின் இடதுபுறத்திற்கும், வலது புறத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை ஒரு செயற்கை மாறியாக எழுதுகிறோம். சோதனைத் தீர்வில் இச்செயற்கைமாறியின் குறி குறைல்லாமல் இருக்குமாறு இவ்வேறுபாட்டின் குறியும் எடுத்துக் கொள்ளப்படும் சமன்பாடுகள் (3·38) அமைக்கும் அட்டவணையை விரிவாக்கிய (Extended) அட்டவணை என்றும், (3·37) அமைப்பதை சுருங்கிய (Contracted) அட்டவணை என்றும் கூறுவது வழக்கம்.

P_{n+1}, P_{n+2}, ..., ${}_nP_{+m}$ என்ற ஓரலகு வெக்டர்கள் அமைக் கும் அடிப்படை விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணியின் செயற்கை (artificial) அடிப்படை எனப்படும். கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்கு ஒரு செய்தக்க தீர்வாவது இருந்தால் அது இவ்விரிவாக்கியப் பிரச்சினைக்கும் செய்தக்க தீர்வாகும். சிம்ப்ளக்ஸ் முறை மீச்சிறு தீர்வையளிப்பதற்கு உறுதி கூறுவதால், இந்த இறுதித் தீர்வில் செயற்கை மாறிகள் எதுவும் மிகை மதிப்பைப் பெற முடியாது. எடுத்துக்கொண்ட பிரச்சினைக்கு செய்தக்க தீர்வு இல்லேயெனின் விரிவாக்கிய பிரச்சினையின் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வில் ஒரு x_{n+i}- ஆவது மிகையாக இருக்கும். புதிய குறிக்கோள் சார்பில் w- ற்கு எந்த மதிப்பும் அளிக்க வேண்டிய தேவை இல்லே என்பது கீழே நிரூபிக்கப்படும்.

விரிவாக்கிய பிரச்சினையின் முதனிலே செய்தக்க தீர்வு

$$X_0 = (x_{n+1,0}, x_{n+2,0}, \dots x_{n+m,0})$$
$$= (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

ஆகும். இந்தத் தீர்விற்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு

$$z_0 = w(b_1 + b_2 + \dots + b_m)$$

ஆகும். இந்தநிலையில், அடிப்படை ஓரலகு அணி என்பதால்,

$$X_j = (x_{1j},\ x_{2j},\ \dots,\ x_{mj}) = (a_{1j},\ a_{2j},\ \dots,\ a_{mj})$$

ஆகும். மேலும்,

$$z_j = w(x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{mj})$$

செயற்கை மாறிகள் அடிப்படையில் இருக்கும் வரையில் ஒவ்வொரு $z_j - c_j$-ம் w-ன் நேரியச் சார்பு ஆகும். முதல் தீர்விற்கு

$$z_j - c_j = w\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - c_j$$

இதிலிருந்து ஒவ்வொரு $z_j - c_j$ - ம் w உள்ள உறுப்பு ஒன்றையும் w-இல்லாத உறுப்பு ஒன்றையும் பெற்றிருக்கும் என்று தெரிகிறது. அட்டவணை (3·6)-ல் இந்த விவரங்களைக் குறித்துள்ளோம். இந்த அட்டவணையில் $(m+1)$ - வது நிரையில் $z_j - c_j$ - ன் w-ஐச் சாராத கெழுவும், $(m+2)$ - வது நிரையில் w-ஐ சார்ந்த கெழுவும் பிரித்து எழுதப்பட்டுள்ளன.

இனி சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைக் கைக்கொண்டு செயற்கை மாறிகளைப் படிப்படியாக நீக்கி புது வெக்டர்களை அடிப்படியில் புகுத்துகிறோம். $(m+2)$ - வது நிரையில் உள்ள $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$ மிகவும் மிகையானது என்றால் அடிப்படையில் உட்புகும் வெக்டர் இதனுடன் தொடர்பு கொண்டதாகும். வழக்கமான நீக்க முறைக்கு $(m+2)$ ஆவது நிரையும் உட்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு முறை நீக்கப்பட்ட செயற்கைமாறி திரும்பவும் அடிப்படையில் புகுத்தப்படமாட்டாது. எனவே கடைசி m நிரல்களின் உறுப்புகளை மாற்றம் செய்யாமலே விட்டு விடுகிறோம். ஆனால் கடைசி அடிப்படையின் தன் மாற்று அணி தேவையென்றால் வழக்கமான முறைப்படி இந்நிரல்களையும் உறுப்பு மாற்ற முறைக்கு உட்படுத்தவேண்டும். சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் திரும்ப திரும்பப் பயன்படுத்துவதால் எல்லா செயற்கை மாறிகளும் அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட்டுவிடும் என்பதில்லை. சில செயற்கை மாறிகள் நீங்காமலேயே தங்கிவிடுவதும் உண்டு. முழுச் செயற்கை அடிப்படையைப் பயன்படுத்தும்போது ஏறத்தாழ $2m$ முறைகள் அடிப்படை மாற்றம் செய்ய வேண்டியிருக்கலாம் என ஆர்டன் கருதுகிறார்.

அட்டவணை (3·6)

செயற்கை அடிப்படை கணக்கீட்டு முறையின் முதனிலை அட்டவணை

				c_1	c_2	·	c_k	·	c_n	w	w	·	w	·	w
i	அடிப்படை	c	P_0	P_1	P_2	·	P_k	·	P_n	P_{n+1}	P_{n+2}	·	P_{n+l}	·	P_{n+m}
1	P_{n+1}	w	$x_{n+1,0}$	x_{11}	x_{12}	·	x_{1k}		x_{1n}	1	0	·	0	·	0
2	P_{n+2}	w	$x_{n+2,0}$	x_{21}	x_{22}	·	x_{2k}	·	x_{2n}	0	1	·	0	·	0
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·		·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
l	P_{n+l}	w	$x_{n+l,0}$	x_{l1}	x_{l2}	·	x_{lk}	·	x_{ln}	0	0	·	1	·	0
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·		·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
m	P_{n+m}	w	$x_{n+m,0}$	x_{m1}	x_{m2}	·	x_{mk}	·	x_{mn}	0	0	·	0	·	1
$m+1$	·	·	0	$-c_1$	$-c_2$	·	$-c_k$	·	$-c_n$	0	0	·	0	·	0
$m+2$	·	·	$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i,0}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} x_{i2}$	·	$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$	·	$\sum_{i=1}^{m} x_{in}$	0	0	·	0	0	0

$(m+2)$- வது நிரையின் உறுப்புக்களைக் கொண்டு அடிப் படையில் ஒரு வெக்டரைப் புகுத்தும் செயல் (அ) அடிப்படையி லிருந்து எல்லா செயற்கை மாறிகளும் நீக்கப்படும்வரை, அல்லது (ஆ) $(m+2)$-ஆவது நிரையில் மிகை உறுப்புகளே இல்லை என்ற நிலைவரை தொடரப்படும். இவற்றுள் (அ) $(m+2)$-ஆவது நிரையின் எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியம் என்பதையும், செயற்கை உறுப்புக் களே இல்லாத அடிப்படை நமது பிரச்சினைக்கான. ஒரு செய்தக்க அடிப்படைத் தீர்வு என்பதையும் புலப்படுத்தும். இனி மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு வழக்கமான முறையில் கணக்கிடப்படும்.

நிலை (ஆ) - ல் குறிக்கோள் சார்பின் செயற்கை மாறிகள் பகுதி அதாவது $(m+2,0)$ ஆவது உறுப்பு பூச்சியத்தை விடப் பெரியது என்றால் எடுத்துக்கொண்ட பிர்ச்சினைக்கு செய்தக்க தீர்வுகள் கிடையாது. தேற்றம் (3 2)ன் படி இந்தத் தீர்விற்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பைவிட வேறு எந்த செய்தக்க தீர்விற்கும் குறைந்த மதிப்பு கிடைக்காது. $(m+2,0)$ ஆவது உறுப்பு பூச்சியம் என்றால் பிரச்சினைக்கு கேடுறுதீர்வு ஒன்று குறைந்தது ஒரு செயற்கை வெக்டரையாவது கொண்டு கிடைக்கப் பெறுகிறது. செயற்கை மாறிகளின் மதிப்பு பூச்சியம் என்று இருப்பினும் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வுகள் கிடைக்காததால் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தொடருகிறோம். இப்பொழுது $(m+2)$-ஆவது நிரையின் 0 உறுப்பிற்கு மேலே உள்ள $(m+1)$- ஆவது நிரையின் நிரம்பவும் மிகையான உறுப்போடு தொடர்பு கொண்ட வெக்டரை அடிப்படையில் புகுத்துகிறோம். மீச்சிறு தீர்வை அடையும் வரை இந்த விதி பயன்படுத்தப்படும். அதாவது, $(m+1)$ -ஆவது நிரையில் $(m+2)$ - ஆவது நிரையின் 0-க்கு மேல் உள்ள உறுப்புகள் மிகையல்லா எண்கள் என்ற நிலை வரும் வரை இவ் விதியைப் பயன்படுத்துகிறோம். இறுதித்தீர்வு செயற்கை மாறி களுக்கு பூச்சியம் என்ற மதிப்புடன் அவற்றைப் பெற்றும் அல்லது பெறுமலும் இருக்கலாம். இந்த விதியைப் பயன்படுத்தும் போது $(m+2)$-ஆவது நிரையின் உறுப்புகள் மாறுவதில்லை. ஏனென்றால் உட்புகுத்தப்படுகின்ற வெக்டரின் $z_j - c_j$ என்பது

$$0.w + (z_j - c_j)\text{-க்குச் சமமாகும்.}$$

மேலே விவரிக்கப்பட்ட இரண்டு நிலைகளிலும் [(அ)-வும் (ஆ)வும்] எல்லா$(m+2,j)$ உறுப்புகளும் மிகையல்லா எண்களாகும். $(m+2,0)$ மட்டும் தவிர்க்கப்பட்டது. ஏனெனில் இதன் மதிப்புகள் குறையல்லா எண்களாகவும் அதிகரிக்காதவையாகவும் இருக்கும்.

எடுத்துக் கொண்ட பிரச்சினைக்கு செய்தக்க, ஆனால், வரம் பற்ற மீச்சிறுமம் இருக்குமானால் செயற்கை அடிப்படை முறையில்

பிரச்சினையின் செய்தக்கத்தன்மை அதன் வரம்பற்ற தன்மை புலப்படுவதற்கு முன்னரே தெளிவாகும்.

எடுத்துக் கொண்ட பிரச்சினையின் கட்டுப்பாடுகள் அணியில் சில ஒரலகு வெக்டர்கள் இருக்குமானுல் இன்னமும் தேவையான அளவுக்கு மட்டும் செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்தி m-பரிமாண ஒரலகு அணியை அமைக்க வேண்டும். இதனுல் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைச் செயல்படுத்தும் தடவைகளின் எண்ணிக்கை வெகுவாகக் குறையும்.

அண்மையில் உல்ஃப் (P. Wolfe) என்பார் கண்டுள்ள முறை செயற்கை மாறிகளையும், தொய்வு மாறிகளையும் ஒருங்கே பெற்றுள்ள கட்டுப்பாடுகளில் செயற்கை மாறிகளை வெளிப்படையாக எழுதாமல் கணக்கீடுகளைச்செய்ய வழிவகுக்கிறது. இதன் விவரங்களை E. M. L. Beale -ன் Mathematical Programming in Practice, §3·3 பக்கங்கள் 28-31 இலும், P. Wolfe -ன் The composite Simplex Algorithm, SIAM Review 7 (1965) பக்கங்கள் 42-54- இலும் காணலாம்.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் வெவ்வேறு பண்புகளை விளக்கும் வகையில் சில எடுத்துக் காட்டுகள் தரப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு கணக்கிற்குமான கணக்கீடுகள் அட்டவணைப்படுத்தபட்டுள்ளன. வெவ்வேறு நிலைகளில் மைய உறுப்பு எது என்பது சுழியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் உட்புகும், வெளிச் செல்லும் வெக்டர்கள் அம்புக் குறியிட்டுக் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துகாட்டு: (1) ஒரு நெசவாளி A, B, C என்ற மூன்று விதமான துணிகளை நெய்யக்கூடும். இவற்றிற்கு சிவப்பு, பச்சை நீல நூல்கள் தேவைப்படுகின்றன. ஒரலகு A வகைத் துணி நெய்ய 20 மீட்டர் சிவப்பு நூலும், 30 மீட்டர் நீல நூலும் தேவைப் படுகின்றன; ஒரலகு B வகைத் துணிக்கு 30 மீ.சிவப்பு நூலும் 20மீ. பச்சை நூலும் 20மீ நீல நூலும் தேவைப்படுகின்றன. ஒரலகு C வகைத்துணிக்கு 50 மீ. பச்சை நூலும், 40 மீ. நீல நூலும் தேவைப் படுகின்றன. அவரிடம் சிவப்பு, பச்சை, நீல நூல்கள் முறையே 80மீ., 100மீ., 150மீ. உள்ளன. ஒரலகு A, B, C வகைத்துணிகள் விற்பதால் அடையும் இலாபம் முறையே ரூ 3, ரூ5, ரூ 4 என்ருல் தம்மிடம் இருக்கும் நூலைப் பயன்படுத்தி அவர் அதிக இலாபம் பெற எத்துணை அலகுகள் ஒவ்வொரு வகைத்துணியையும் நெய்தல் வேண்டும்?

தீர்வு: கொடுத்துள்ள பிரச்சினைக்கு கணித மாதிரி (mathematical model) அமைத்தால் அது நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்

சினையாக மாறுவதைக் காணலாம். நெசவாளி *A*, *B*, *C* வகைத் துணிகளை முறையே x_1, x_2, x_3 அலகுகள் நெய்வதாகக்கொள்வோம். எனவே அவர் சிவப்பு, நீலம், பச்சை நூல்களை முறையே $2x_2+3x_3$, $3x_1+2x_2+4x_3$, $2x_2+5x_3$ டெக்கா மீட்டர்கள் பயன்படுத்துகிறார். அவருடைய மொத்த வருமானம் $3x_1+5x_2+4x_3$ ரூபாய் ஆகும். இனி கணக்கைப்பின்வருமாறு அமைக்கலாம் :

$3x_1+5x_2+4x_3$-ன் மீப்பெரு மதிப்பைப் பின்வரும் கட்டுப்பாடு களுக்கு இணங்கக்கணக்கிடுக :

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2 \qquad & \leq 8 \\ 3x_1+2x_2+4x_3 & \leq 15 \\ 2x_2+5x_3 & \leq 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

x_4, x_5, x_6 என்ற குறையல்லாத் தொய்வு மாறிகளை உட்புகுத்தி சமனின்மைக் கட்டுப்பாடுகளைச் சமன்பாடுகளாக மாற்றுகிறோம். மேலும் $3x_1+5x_2+4x_3$ என்பதன் இடத்து $-3x_1-5x_2-4x_3$ என்பதைக் குறிக்கோள் சார்பாகக் கொண்டு அதன் மீச்சிறும மதிப்பைக் காண்போம். நமது பிரச்சினை இப்பொழுது பின்வருமாறு ஆகிறது :

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2 \qquad +x_4 \qquad\qquad & = 8 \\ 3x_1+2x_2+4x_3 \qquad +x_5 \qquad & = 15 \\ 2x_2+5x_3 \qquad\qquad +x_6 & = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \qquad & \geq 0 \end{aligned}$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க

$$-3x_1-5x_2-4x_3$$

என்பதன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

மூன்று கட்டுப்பாடுகள் இருப்பதாலும் அதற்குத் தகுந்தவாறு கட்டுபாடுகள் அணியில் முப்பரிமாண ஓரலகு அணியை x_4, x_5, x_6-க்களின் கெழுக்கள் அமைப்பதாலும் § 3.4-ல் விவரித்தபடி இப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணலாம். செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்த வேண்டிய தேவை இல்லாமலே முதனிலை செய்தக்க தீர்வு கிடைத்து விடுகிறது. ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 8$, $x_5 = 10$, $x_6 = 15$) அட்டவணைகள் (3·7) தொடக்கம் (3.10) தீர்வு கண்டமுறையை விளக்குகின்றன.

இறுதி நிலைத் தீர்வில் $x_1=\frac{89}{41}$; $x_2=\frac{50}{41}$; $x_3=\frac{62}{41}$ $x_4=x_5=x_6=0$ என்பதால் குறிகோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு $-765/41$ என்று

அட்டவணை (3.7)

முதனிலை

i	அடிப்படை	c		-3	-5	-4	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	8	2	[3]	0	1	0	0
2	P_5	0	15	3	2	4	0	1	0
3	P_6	0	10	0	2	5	0	0	1
$z_j - c_j$			0	3	5	4	0	0	0

→ நீக்கப்படும் வெக்டர் (row 1)

↑ உட்புகும்வெக்டர் (P_2)

அட்டவணை (3.8)

இரண்டாம் நிலை

i	அடிப்படை	c		-3	-5	-4	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	-5	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0
2	P_5	0	29/3	5/3	0	4	-2/3	1	0
3	P_6	0	14/3	-4/3	0	[5]	-2/3	0	1
$z_j - c_j$			$-\frac{40}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	4	$-\frac{5}{3}$	0	0

→ நீக்கப்படும் வெக்டர் (row 3)

↑ உட்புகும்வெக்டர் (P_3)

அட்டவணை (3.9)

மூன்றாம் நிலை

i	அடிப்படை	c		-3	-5	-4	0	0	0	
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_2	-5	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0	
2	P_5	0	89/15	**[41/15]**	0	0	-2/15	1	-4/5	→ நீக்கப்படும் வெக்டர்
3	P_3	-4	14/15	-4/15	0	1	-2/15	0	1/5	
$z_j - c_j$			$-\frac{256}{15}$	+11/15	0	0	-17/15	0	-4/5	
				↑ உட்புகும்வெக்டர்						

அட்டவணை (3.10)

நான்காம் நிலை (இறுதி நிலை)

i	அடிப்படை	c		-3	-5	-4	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	-5	$\frac{50}{41}$	0	1	0	$\frac{15}{41}$	$-\frac{10}{41}$	$\frac{8}{41}$
2	P_1	-3	$\frac{89}{41}$	1	0	0	$-\frac{2}{41}$	$\frac{15}{41}$	$-\frac{12}{41}$
3	P_3	-4	$\frac{62}{41}$	0	0	1	$-\frac{6}{41}$	$\frac{4}{41}$	$\frac{5}{41}$
$z_j - c_j$			$-\frac{765}{41}$	0	0	0	$-\frac{45}{41}$	$-\frac{11}{41}$	$-\frac{24}{41}$

கிடைக்கிறது. நெசவாளி $\frac{89}{41}$அலகுகள் A வகைத் துணியையும்,$\frac{59}{41}$ அலகு B வகைத் துணியையும் $\frac{62}{41}$ அலகுகள் C வகைத் துணியையும் நெய்து அதிகபட்ச இலாபமாகிய ரு. **765/41-ஐ** அடையலாம் எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு (2) ; $x_1, x_2 \geqslant 0$ என்ற மாறிகள்

$$3x_1+x_2 \geqslant 27$$

$$x_1+x_2 \geqslant 21$$

$$x_1+2x_2 \geqslant 30$$

என்ற கட்டுபாடுகளை நிறைவு செய்யும்போது

$$4x_1+2x_2\text{-ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்பு என்ன? அதைக் கொடுக்கும் தீர்வு யாது?

தீர்வு: x_3, x_4, x_5 என்ற குறையல்லா தொய்வு மாறிகளை சமன் பாட்டிற்கொன்றாக உட்புகுத்திக் கட்டுபாடுகளைச் சமன்பாடுகளாக மாற்றுகிறோம். இந்த நிலையிலும் கட்டுப்பாடுகளின் கெழுக்கள் **3 x 3** ஓரலகு அணியைக் கொடுக்கவில்லை. எனவே x_6, x_7, x_8 என்ற செயற்கைமாறிகளையும் உட்புகுத்திக் கட்டுப்பாடுகளைப் பின்வரு மாறு மாற்றி எழுதுகிறோம்.

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3 \qquad\qquad +x_6 \qquad\qquad &= 27 \\ x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad\qquad +x_7 \qquad &= 21 \\ x_1+2x_2 \qquad\qquad -x_5 \qquad\qquad +x_8 &= 30 \end{aligned}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,8$$

w என்பது மிகப்பெரிய எண் என்றால் மீச்சிறு மதிப்பு காணப்பட வேண்டிய குறிக்கோள் சார்பு

$$4x_1+2x_2+wx_6+wx_7+wx_8$$

ஆகும். x_6, x_7, x_8களை முதனிலை அடிப்படை மாறிகளாகக்கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பின்பற்றிச் செயற்கை மாறிகளைப் படிப்படியாக நீக்கி மீச்சிறு தீர்வு காண்கிறோம். பின்வரும் அட்டவணைகளில் விளக்கம் தரப்படுகிறது. அட்டவணைகள் **(3.11)** முதல் **(3.14)** வரை பார்க்கவும்.

அட்டவணை (3.11)

முதனிலை:

i	அடிப்படை	c		4	2	0	0	0	w	w	w	
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	
1	P_6	w	27	[3]	1	−1	0	0	1	0	0	→ நீக்கப்படும் வெக்டர்
2	P_7	w	21	1	1	0	−1	0	0	1	0	
3	P_8	w	30	1	2	0	0	−1	0	0	1	
4				−4	−2	0	0	0	0	0	0	
5			78	5	4	−1	−1	−1	0	0	0	
				↑ உட்புகும்வெக்டர்								

அட்டவணை (3.12)

இரண்டாம் நிலை :

i	அடிப்படை	c		4	2	0	0	0	w	w	
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_7	P_8	
1	P_1	4	9	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	
2	P_7	w	12	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	−1	0	1	0	
3	P_8	w	21	0	$\boxed{\frac{5}{3}}$	$\frac{1}{3}$	0	−1	0	1	→ நீக்கப்படும் வெக்டர்
4			36	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	0	0	
5			33	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	−1	−1	0	0	
					↑ உட்புகும்வெக்டர்						

அட்டவணை (3.13)

மூன்றும் நிலை :

i	அடிப்படை	c		4	2	0	0	0	w
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_7
1	P_1	4	$\frac{24}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0
2	P_7	w	$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	–1	$\boxed{\frac{2}{5}}$	1
3	P_2	2	$\frac{63}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0
4			$\frac{222}{5}$	0	0	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0
5			$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	–1	$\frac{2}{5}$	0

→ நீக்கப்படும் வெக்டர்

↑ உட்புகும்வெக்டர்

அட்டவணை (3.14)

நான்காம் நிலை :

i	அடிப்படை	c		4	2	0	0	0
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	4	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2	P_5	0	9	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1
3	P_2	2	18	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
4			48	0	0	–1	–1	0

நான்காம் நிலையில் செயற்கை மாறிகள் அறவே நீக்கப்பட்டு விட்டன. இறுதி நிரையில் $z_j - c_j \leq 0$ (அனைத்து j-க்கும்) என்ற வாறு உள்ளது. இதுவே இறுதிநிலை என்பது இதனால் புலப்படு கிறது. மீச்சிறுமதிப்பு $z_0 = 48$ என்பதையும் அட்டவணை தருகிறது. $x_1 = 3$, $x_2 = 18$ என்ற மதிப்புகள் இம்மீச்சிறு மதிப்பைக் கொடுக் கின்றன. கணக்கில் கொடுத்துள்ள அமைப்பில் சமன்பாடுகள் $x_1 = 3$, $x_2 = 18$ என்னும்போது நிறைவு செய்யப்படுகின்றன என் பதைச் சரி பார்க்கவும்.

அடுத்துவரும் எடுத்துக்காட்டுகள் செயற்கை மாறிகள் முறை யை மேலும் விளக்குவதுடன் பிரச்னைக்கு செய்தக்க தீர்வு இல்லாத நிலையையும்,வரம்புடைய தீர்வு இல்லாத நிலையையும்,தீர்வு கேடுறு நிலையையும் விளக்குகின்றன. ஒவ்வொரு அட்டவணை யிலும் வெவ்வேறு மூலகங்களைக் காண நாம் மாற்ற நீக்க வாய்ப் பாடுகள் (3.36).ஐப் பயன் படுத்துகிறோம். தவிரவும் ஒவ்வொரு கணக்கிற்கும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதனிலை அட்டவணையை (3.6) உடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து நன்றாகப் புரிந்து கொள்ளவும்.

எடுத்துக்காட்டு (3) : பின்வரும் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு காண்க:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad\quad &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad\quad &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

என்பதன் மீப்பெரு மதிப்பு காண வேண்டும்.

தீர்வு: கட்டுப்பாடுகளில் ஓரலகு (P_4) ஒன்று இருக்கிறது. எனவே முதல் இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் முறையே செயற்கை குறை யல்லா மாறிகள் x_5, x_6 களைப் புகுத்தி கட்டுப்பாடுகளை

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad\quad + x_5 \quad\quad &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \quad\quad\quad\quad + x_6 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad\quad\quad &= 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

என்று எழுதலாம். x_4, x_5, x_6 களை அடிப்படை மாறிகளாக எழுதி னால்முதனிலை செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கிறது. செயற்கை மாறிகளை

அட்டவணை (3.15)

i	அடிப்படை	c	P_0	-1 P_1	-2 P_2	-3 P_3	1 P_4	w P_5	w P_6	
1	P_5	w	15	1	2	3	0	1	0	முதனிலை
2	P_6	w	20	2	1	[5]	0	0	1	→
3	P_4	1	10	1	2	1	1	0	0	
4			10	2	4	4	0	0	0	
5			35	3	3	8 ↑	0	0	0	
1	P_5	w	3	$-\frac{1}{5}$	[$\frac{7}{5}$]	0	0	1		→ இரண்டாம் நிலை
2	P_3	-3	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0		
3	P_4	1	6	3/5	$\frac{9}{5}$	0	1	0		
4			-6	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$	0	0	0		
5			3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$ ↑	0	0	0		
1	P_2	-2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0			மூன்றாம் நிலை
2	P_3	-3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	1	0			
3	P_4	1	$\frac{15}{7}$	[$\frac{6}{7}$]	0	0	1			→
4			$-\frac{90}{7}$	$\frac{6}{7}$ ↑	0	0	0			
1	P_2	-2	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{6}$			நான்காம் நிலை (இறுதி நிலை)
2	P_3	-3	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$			
3	P_1	-1	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{7}{6}$			
4			-15	0	0	0	-1			

மீப்பெருமதிப்பாகிய **15**, $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = 0$ என்னும்போது கிடைக்கிறது. (அட்டவணையில் உட்புகும் வெக்டரும், நீக்கப்படும் வெக்டரும் அம்புக்குறியிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன).

w என்ற எண்ணால் பெருக்கிப்பிரச்னையை மேற்கூறிய கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$-x_1-2x_2-3x_3+x_4+wx_5+wx_6$$

என்பதன் மீச்சிறுமம் காண்பதற்கான பிரச்னையாக எழுதுகிறோம். இனி வழக்கமான முறைப்படி செயற்கை மாறிகளை நீக்க முயன்று அதில் வெற்றி பெற்றால் பின்னர் மீச்சிறு மதிப்பை சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி அடைகிறோம். அனைத்து விவரங்களும் பக்கம் 135.ல் அட்டவணை(3.15)ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு: 4

$$x_1 + x_2 < 50$$
$$x_1 + 2x_2 > 80$$
$$3x_1 + 2x_2 > 140$$
$$x_1, x_2 > 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $4x_1+3x_2$-ன் மீப்பெரு மதிப்பு காண்க.

தீர்வு: x_3, x_4, x_5 என்ற தொய்வு மாறிகளையும் x_6, x_7 என்ற செயற்கை மாறிகளையும் வரையறை செய்துகொண்டு கட்டுப்பாடுகளை

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 50 \\ x_1+2x_2 \quad -x_4 \quad +x_6 \qquad &= 80 \\ 3x_1+2x_2 \quad -x_5 \quad +x_7 &= 140 \end{aligned}$$
$$x_i > 0,\ i=1,2,\ldots,7$$

என்று எழுதலாம். இக்கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க

$$-4x_1-3x_2+wx_6+wx_7\text{-ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்பு காண்பதே நமது பிரச்னையாகும். இங்கு w என்பது மதிப்பு குறிப்பிடப்படாத பெரிய எண் ஆகும். கட்டுப்பாடுகளில் x_3, x_6, x_7 களின் கெழுக்கள் 3x3 ஒரலகு அணியை அமைத்து முதனிலை செய்தக்க தீர்வாக $x_1=x_2=x_4=x_5=0$, $x_3=50, x_6=80$, $x_7=140$ என்பதைக் கொடுக்கின்றன. செயற்கை மாறிகளை அடிப்படையிலிருந்து அறவே நீக்கி இவ்விரிவாக்கப்பட்ட பிரச்னைக்கு தீர்வு காண முடிந்தால் அது கொடுக்கப்பட்ட பிரச்னைக்கு செய்தக்க தீர்வு ஆகும் என்று முன்னரே குறிப்பிட்டோம். இந்தக் கணக்கில் மூன்றும் நிலையில் $(m+2)$ ஆவது அதாவது 5-வது வரிசை எண்கள் யாவும் மிகையல்லா எண்கள் ஆகிவிடுவதால் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையை தொடர இயலாமல் போகிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட பிரச்னைக்கு செய்தக்க தீர்வு கிடையாது.

அட்டவணை (3.16)

i	அடிப்படை	c	P_0	-4 P_1	-3 P_2	0 P_3	0 P_4	0 P_5	w P_6	w P_7	
1	P_3	0	50	1	1	1	0	0	0	0	முதனிலை
2	P_6	w	80	1	2	0	−1	0	1	0	
3	P_7	w	140	[3]	2	0	0	−1	0	1	→
4			0	4	3	0	0	0	0	0	
5			220	4 ↑	4	0	−1	−1	0	0	
1	P_3	0	$\frac{10}{3}$	0	[$\frac{1}{3}$]	1	0	$\frac{1}{3}$	0		→
2	P_6	w	$\frac{100}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	−1	$\frac{1}{3}$	1		இரண்டாம் நிலை
3	P_1	−4	$\frac{140}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0		
4			$-\frac{560}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	0		
5			$\frac{100}{3}$	0	$\frac{4}{3}$ ↑	0	−1	$\frac{1}{3}$	0		
1	P_2	3	10	0	1	3	0	1	0		
2	P_6	w	20	0	0	−4	−1	−1	1		மூன்றாம் நிலை (இறுதி நிலை)
3	P_1	−4	40	1	0	−2	0	−1	0		
4			−190	0	0	−1	0	1	0		
5			20	0	0	−4	−1	−1	0		

எடுத்துக்காட்டு (5): $3x_1 + 2x_2 + x_3$-ன் மீப்பெருமதிப்பை

$$-3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$$
$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 7$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க.

தீர்வு: x_1, x_2, x_3 என்னும் மாறிகளில் எதை அடிப்படையல்லா மாறியாகக் கொண்டாலும் செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கவில்லை என்

பதைக் கவனிக்கவும். எடுத்துகாட்டாக x_1 அடிப்படையில்லா மாறி என்றால் $x_1=0$ என்னும்போது x_2 குறையெண்ணாகவிருக்கும். எனவே ஓரலகு அணியைக் கட்டுப்பாடுகள் அணியில் கொண்டுவருவதற்காகவும் முதனிலை செய்தக்க தீர்வு பெறுவதற்காகவும் x_4, x_5 என்ற குறையல்லா செயற்கை மாறிகளை முறையே இரு கட்டுப்பாடுகளிலும் புகுத்திப் பிரச்சினையை பின்வருமாறு அமைக்கிறோம்:

$$-3x_1+2x_2+2x_3+x_4 \qquad =8$$
$$-3x_1+4x_2+\ x_3 \qquad +x_5=7$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$-3x_1-2x_2-x_3+wx_4+wx_5\text{-ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்பைக் கணக்கிடுக. (இங்கு w மதிப்புக்குறிப்பிடப்படாத மிகப் பெரிய எண் ஆகும்).

பின்வரும் அட்டவணை (3.17)-ல் கணக்கீட்டு விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. இறுதி நிலையில் செயற்கை மாறிகளுக்கான வெக்டர்

அட்டவணை (3.17)

i	அடிப்படை	c	P_0	-3 P_1	-2 P_2	-1 P_3	w P_4	w P_5	
1	P_4	w	8	-3	2	2	1	0	முதனிலை
2	P_5	w	7	-3	[4]	1	0	1	→
3			0	3	2	1	0	0	
4			15	-6	6 ↑	3	0	0	
1	P_4	w	$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	[$\frac{3}{2}$]	1		→
2	P_2	-2	$\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0		இரண்டாம் நிலை
3			$-\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0		
4			$\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	↑ $\frac{3}{2}$	0		
1	P_3	-1	3	-1	0	1			மூன்றாம் நிலை
2	P_2	-2	1	$-\frac{1}{2}$	1	0			
3			-5	5 ↑	0	0			

கள் அடிப்படையில் இல்லாவிட்டாலும் உட்புகும் வெக்டர் P_1-க்கு பதில் எந்த வெக்டர் நீக்கப்படவேண்டும் என்பது தீர்மானிக்க முடியவில்லை. அதாவது $P_1 \leqslant 0$ என்று உள்ளது. எனவே, இப் பிரச்சினையின் தீர்வு வரம்பற்றதாகும்.

பயிற்சிகள் — பாடம் 3

(3.1) x_i ($i=1, 2, \ldots, 6$) என்னும் குறையல்லா மாறிகள் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன:

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad\qquad &=1\\
5x_2+3x_3-x_4 \qquad\quad &=2\\
x_2+2x_3 \qquad -x_5 \quad &=1\\
4x_2+\ x_3 \qquad\qquad +x_6 &=2
\end{aligned}
$$

$C=4x_1+5x_2+7x_3$-ன் மீச்சிறு மதிப்பை §3.1-ன் எடுத்துக் காட்டில் கூறியவாறு கணக்கிட்டுக் காண்க. இப்பிரச்சினை யின் வடிவ கணித விளக்கமும் தருக. (பீல்)

(3.2) சோப்புக்கள் (soaps) தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்று அரை மணி நேர விளம்பர நிகழ்ச்சியொன்றை வானொலியில் ஒலி பரப்பத் தீர்மானிக்கிறது. அந்நிகழ்ச்சியில் பிரபல நகைச் சுவை நடிகர் ஒருவரும், மெல்லிசைக் குழுவினரும் பங்கேற்கிருர்கள். வானொலி நிலையத்தார் 12 நிமிடங்களுக்கு மேற்படாமல் விளம்பர அறிவிப்புகள் செய்ய வேண்டும் என்றும், நிறுவனத்தார் குறைந்தது 3 நிமிடங்களாவது விளம்பர அறிவிப்புகள் இருக்க வேண்டும் என்றும் கட்டுப்படுத்துகிருர்கள். அரைமணி நிகழ்ச்சியில் 20 நிமிடங்களுக்கு மேல் நகைச்சுவை நடிகர் பங்கேற்க மாட்டார். (மேலும் அவருக்கு விளம்பர அறிவிப்புகளுக்கு அளிக்கப்படும் நேரத்தை விடக் குறைவாகக் கொடுக்கக் கூடாது.) எனவே எஞ்சிய நேரத்தை மெல்லிசைக் குழுவினர் கட்டாயமாக பயன்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். நடிகர் பங்கேற்கும் ஒவ்வொரு நிமிடத்திற்கும் அவருக்கு ரூ. 150/- தரவேண்டும். மெல்லிசைக் குழுவினருக்கு நிமிடத்திற்கு ரூ. 100/- செலவாகிறது. இடையிடையே விளம்பரம் செய்யும் அறிவிப்பாளருக்கு நிமிடத்திற்கு ரூ. 50/– கொடுக்க வேண்டும். நகைச்சுவை நடிகர் பங்கேற்கும் போது நிமிடத்திற்கு 4000 பேர் நிகழ்ச்சியைக் கேட்கிருர்கள் என்றும், மெல்லிசைக் குழுவினருக்கு இந்த

எண்ணிக்கை 2000 என்றும் எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. அதே போழ்து விளம்பர அறிவிப்புகள் ஒலிபரப்பாகும் போது நிமிடத்திற்கு 1000 பேர் வானொலியை நிறுத்தி விடுகிருர்கள். கொடுக்கப்பட்ட ½ மணி நேரத்தை நடிகர், மெல்லிசைக் குழுவினர், அறிவிப்புகள் ஆகியவற்றிற்கு எங்ஙனம் ஒதுக்கீடு செய்தால்

(i) கேட்போரின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாகக் இருக்கும்?

(ii) நிறுவனங்களுக்கு ஆகும் செலவு மிகக் குறைவாக இருக்கும்?

வடிவ கணித முறையில் விளக்கம் தருக. (கிளிக்ஸ்மான்) (பிரச்சினையின் கணித மாதிரியை நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக அமைக்கவும்.)

(3.3) மாணவர்கள் கூட்டுறவு விற்பனை நிலையம் ஒன்றில் ஒரு குயர் நோட்டு 4 காசுகள் இலாபத்திற்கும் கணித புத்தகம் 5 காசுகள் இலாபத்திற்கும் விற்கப்படுகின்றன. ஒரு நோட்டு விற்பதற்கு உதவியாளர் 3 நிமிடங்களையும், பணம் பெறுபவர் (cashier) 1 நிமிடமும் எடுத்துக் கொள்கின்றனர். புத்தகம் விற்பதற்கு இவர்கள் இருவரும் தனித்தனியே எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் 2 நிமிடங் களாகும். பள்ளி வேலை நேரங்களில் விற்பனை நிலையம் தினந்தோறும் இரண்டு மணி நேரம் திறந்து வைக்கப் பட்டுப் பணம் பெறுவதற்கு ஒருவரும், உதவியாளர்களாக இருவரும் பணியமர்த்தப்பட்டுள்ளனர். மிக அதிகமான இலாபம் பெற எத்தனை நோட்டுகளும், புத்தகங்களும் ஒவ்வொரு நாளும் விற்பதற்கு விற்பனை நிலையம் முயற்சி செய்யவேண்டும் ? (கிளிக்ஸ்மான்)

(3.4) மாணவர் திரு.சற்குணம் ஒருநாள் இரண்டரை மணி நேரப் பொழுதை கல்லூரியில் எவ்வாறு கழிப்பது என்று தெரியாமல் தவிக்கின்ருர். அவர் செய்யக்கூடும் என்று நினைக்கும் காரியங்கள் எல்லாம் கல்லூரிக் கட்டுப்பாடு களுக்கு எதிரானவை. அவரைப்பற்றிய புகார் முன்னரே முதல்வருக்கு எட்டியுள்ளது. கல்லூரி ஒழுங்கு நட வடிக்கைக் குழு (College disciplinary Committee) கல்லூரி விதிமுறைகளை மீறி அவர் செய்யும் காரியங்களுக்கு அபராதம் விதிக்கும் என்பதும் அவர் அறிந்ததே!

இருப்பினும் பின்வரும் காரியங்களுள் ஒன்றை (அல்லது எல்லாவற்றையும் கூட) செய்யாமல் அவரால் இருக்க முடியாது:

(*i*) அறிவிப்புப் பலகையில் தவருன தகவல்களை எழுதி ஒட்டுதல்;

(*ii*) நூல் நிலையத்தில் சத்தம் போடுதல்;

(*iii*) கல்லூரித் தாழ்வாரங்களில் வகுப்பு நேரத்தில் திரைப்பட மெட்டுகளை இசை(?)த்துக்கொண்டே உலவுதல்;

(*iv*) இளைய வகுப்பு மாணவர்களைச் சீண்டுதல் (teasing). இக் காரியங்களில் ஈடுபடும்போது அவர் பிடிபட்டால் செலுத்த வேண்டிய அபராதத் தொகைகள் ஒவ்வொரு நிமிடத்திற்கும் முறையே 60, 30, 10, 40 காசுகள் ஆகும்.

இயற்கையாகவே பொய் வதந்திகளைப் பரப்புவதில் நாட்ட முடையவர் என்பதால் குறைந்தது 25 நிமிடங்கள் அறிவிப்புப் பலகையை தனது இலக்காகக் கொள்ளவும், ஒருமணி நேரத்திற்கு மேல் நூல் நிலையம் சப்பிட்டு விடும் (boring) என்பதால் அதற்கும் குறைந்த நேரத்தைத்தான் நூல் நிலையத்தில் கழிக்கவும் விரும்புகிருர். 15 நிமிடங்களுக்குக் குறையாமல் இளைய (Junior) மாணவர்களைச் சீண்டாமல் இருந்தால் பொழுதைப் பயனுறக் கழித்த நிறைவு ஏற்படாது! மற்றச் செயல் முறைகள் காரணமாக நான்கு 5 நிமிட இடைவெளிகளில் தான் அவரால் தாழ்வாரங்களில் உலவ முடிகிறது. திரு. சற்குணம் செலுத்த வேண்டிய அபராதத்தொகை மிகக் குறைந்ததாக இருப்பதற்கு மேற்கூறிய நான்கு செயல் முறைகளிலும், அவர் தனித்தனியே எவ்வளவு நேரம் செலவிட வேண்டும்? (கிளிக்ஸ்மான்)

(3.5) திரு. இராமானுசத்தின் ஆசிரியர் அவருக்கு மூன்று பட்டியல் வீட்டுக்கணக்குகள் கொடுத்துள்ளார். அவற்றுள் நூறு கணக்குகள் (சரியாகப்) போட வேண்டும் என்பது ஆசிரியரின் ஆணை. தமது அனுபவத்தில் முதல், இரண் டாவது, மூன்ருவது பட்டியல்களின் கணக்குகள் ஒவ் வொன்றையும் போட முறையே 3, 2, 4 நிமிடங்கள் தேவை என்று அவர் அறிவார். மற்ற பாடங்

களையும் படிக்க வேண்டி இருப்பதால் கணிதத்திற்கு $3\frac{1}{2}$ மணிக்கும் கூடுதலாக அவரால் ஒதுக்க முடியாது. முதல் இரண்டு பட்டியல் கணக்குகள் எண் சார் கணக்கீடுகளைப் (numerical calculations) பெற்றிருப்பதால் $2\frac{1}{2}$ மணி நேரத்திற்கு மேல் அவற்றைச் செய்தால் அலுத்துவிடும். முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது பட்டியல் கணக்குகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் முறையே **5, 4, 6** மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு பட்டியலில் இருந்தும் எவ்வளவு கணக்குகள் தேர்ந்தெடுக்கச் சரியாகப் போட்டால் திரு. இராமனுசன் மிக அதிகமான மதிப்பெண்களைப் பெறுவார்? (கிளிக்ஸ்மான்)

(3.6) ஒரு மோட்டார் நிறுவனம் 'அனுமான்' 'ஆஞ்சநேயன்' என்ற இரண்டு விதமான கார்களைத் தயாரிக்கிறது. இவற்றை விற்பதில் முறையே கார் ஒன்றுக்கு ரூ. 2000/-, ரூ. 1000 இலாபம் பெறுகிறது. 'அனுமானின்' உற்பத்தியில் வெவ்வேறு பாகங்களை ஒன்று சேர்ப்பதற்கு (assembling) சராசரியாக 150 உழைப்பு மணிகளும் (man-hours) வண்ணப் பூச்சு கொடுப்பதற்கு (painting) 50 உழைப்பு மணிகளும் இறுதியில் சரிபார்த்தலுக்கு (final verification) 10 உழைப்புமணிகளும் தேவைப்படுகின்றன. 'ஆஞ்சநேயனின்' உற்பத்தியில் இவை முறையே 60, 40, 20 உழைப்பு மணிகளாகும். உற்பத்தி நேரத்தில் பாகங்களை ஒன்று சேர்க்கும் குழு, வண்ணப்பூச்சு கொடுக்கும் குழு, இறுதியில் சரிபார்க்கும் குழு,—இவை மூன்றும் முறையே 30, 13, 5 ஆயிரம் உழைப்பு மணிகளைக் கொடுக்கக்கூடும். நிறுவனத்தார் மிக அதிகமான இலாபம் பெற எவ்வளவு 'அனுமான்'களையும் 'ஆஞ்சநேயன்'களையும் உற்பத்திச் செய்ய வேண்டும்? (கிளிக்ஸ்மான்)

(3.7) ஒரு நெசவாளி மூன்று விதமான A, B, C, கம்பளித் துணிகளை நெய்யக் கூடும். இவற்றிற்கு, சிவப்பு, பச்சை, நீலம் என்ற நிறங்களில் கம்பளி நூல் (wool) தேவைப்படுகிறது. ஓரலகு A வகைத் துணிக்கு 30. மீ சிவப்பு நூலும், 20 மீ. நீல நூலும் தேவைப்படுகின்றன. B வகைத் துணி ஓரலகிற்கு 30மீ. சிவப்பு நூலும், 20மீ. பச்சை நூலும் தேவைப்படுகின்றன. ஓரலகு C வகைத்துணி நெய்வதற்கு 40மீ. பச்சை நூலும், 30 மீ. நீல நூலும் தேவைப்படுகின்றன. நெசவாளி சிவப்பு, பச்சை, நீலநூல்களை முறையே 180, 100, 240 மீட்டர்கள் பெற்றிருக்கிறார். A, B, C

வகைத் துணிகள் ஓரலகு விற்வதில் முறையே 3, 5, 4 ரூபாய் கள் இலாபம் கிடைக்கும் என்றால் அவர் எந்த அளவில் மூன்று வகைத் துணிகளையும் தயாரித்தால் அதிகமான இலாபம் பெறுவார் என்பதைக் காண்க.

(3.8) (திட்ட உணவுப் பிரச்சினை): குழந்தைகளுக்கான உணவுப் பொருள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்று சவ்வரிசி, கொழுப் புப் பொருள் சேர்க்கப்பட்டப் பால் பவுடர், இறைச்சிப் பண்டம் ஆகியவற்றின் கலவையாக மாவுப் பொருளைத் தயாரிக்க எண்ணுகிறது. இப் பொருளின் குறித்தளவு புரதச் சத்துக்கள், கொழுப்பு, வைட்டமின்கள், கார்போஹைட் ரேட்டுகள் ஆகியவையும் இருக்க வேண்டும். பின்வரும் அட்டவணையில் வேதியியல் பகுப்பாய்வும், கலவையின் மூலகங்களின் விலை விவரங்களும் உணவுத் தேவைகளுடன் உலர்ந்த எடையின் விழுக்காடுகளாகத் தரப்பட்டுள்ளன. மாவுப் பண்டம் தயாரிப்பதற்கான செலவு மிகக் குறைவாக இருக்க வேண்டுமானால் கலவையில் வெவ்வேறு உட் பொருள்களை எந்த அளவில் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டும் என்பதைக் கணித மாதிரியை நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை யாக அமைத்துக் கணக்கிடுக. (பீல்)

	தேவை	சவ்வரிசி	கொழுப்புப் பொருள் சேர்க்கப்பட்ட பால் பவுடர்	இறைச்சிப் பண்டம்
புரதச்சத்துக்கள்	$\geqslant 20$	0	30	50
கொழுப்பு	$\geqslant 10$	0	20	10
கார்போ ஹைட் ரேட்டுகள்	குறிப்பிடப் படவில்லை	100	40	0
வைட்டமின்கள்	$\leqslant 20$	0	10	40
விலை (ரூ./கிலோ உலர்ந்த எடை)		40	70	30

[குறிப்பு: இந்தக் கணக்கிற்கான நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை x_1, x_2, x_3களைச் சரியாக எடுத்துக்கொண்டால் பயிற்சி (3-1)-க்கு ஒருங்கும்.]

(3.9) $y = -5x_1 + 8x_2 + 3x_3$ என்னும் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பை

$$2x_1+5x_2-x_3 \leqslant 1$$
$$-3x_1-8x_2+2x_3 \leqslant 4$$
$$-2x_1-12x_2+3x_3 \leqslant 9$$
$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\quad x_3 \geqslant 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க.

(ஃப்ரோபெர்க்)

(3.10) $f = -1+x_2-x_3$-ன் மீப்பெரு மதிப்பை

$$x_4 = \quad x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_5 = 2 - x_1 \quad - x_3$$
$$x_i \geqslant 0;\quad i=1,2,\ldots,5$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க.

(ஃப்ரோபெர்க்)

(3.11) சுரங்கத் தொழிலகம் ஒன்று A, B என்னும் இரண்டு சுரங்கங்களிலிருந்து a, b, c என்னும் மூன்று தரங்களில் உலோகமொன்றை வெட்டி எடுக்கிறது. வாரந்தோறும் இந்த மூன்று தரங்களிலும் முறையே 240,160,440 குவிண்டால்கள் உலோகம் வெட்டி எடுக்கப்பட வேண்டும். நாளொன்றுக்கு A, B சுரங்கங்களுக்கு ஆகும் செலவு முறையே 30, 20 ஆயிரம் ரூபாய்கள். தினமும் A-விருந்து 60, 20, 40 குவிண்டால்களும், B-லிருந்து 20, 20, 60 குவிண்டால்களும் முறையே a, b, c தர உலோகம் வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது. மிகச் சிக்கனமான உற்பத்தித் திட்டத்தைக் (production schedule) காண்க.

[குறிப்பு : நேரியநெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாற்றி குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறுமத்தை அளிக்கும் தீர்வு காண்க. வாரத்தில் x_1, x_2 நாட்கள் முறையே A, B வேலை செய்வதாகக் கொள்ளவும்.]

4. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் இருமைப் பண்புகளும் இருமைத் தேற்றங்களும்

(Dual Properties and Dual Theorems of a Linear Programming Problem)

4.1. முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகள் (Primal–Dual Problems)

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையொன்று கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், இருமைப் பிரச்சினை என வழங்கப்படும் அதனுடன் தொடர்பு பெற்ற வேருெரு பிரச்சினையை அமைக்கமுடியும். இந்தப் புதிய பிரச்சினையைப் பொறுத்து நாம் எடுத்துக்கொண்ட மூலப் பிரச்சினை முதன்மைப் பிரச்சினை எனப்படும். இவ்விரண்டுள் எந்தவொன்றின் தீர்வும் மற்றதன் தீர்வையும் வெளிப்படையாகவே அளிக்கிறது. இந்தப் பாடத்தில் இருமைப் பிரச்சினையை அமைக்கும் முறையும், அதன் தீர்வுக்கான சில தேற்றங்களும், இருமைச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையும் விளக்கப்படுகின்றன.

இப் பிரச்சினைகளை (அ) சமச்சீரற்ற முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகள், (ஆ) சமச்சீர் பெற்ற முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகள் என இரு வகைகளாகப் பிரிக்கிறோம்.

(அ) சமச்சீரற்ற முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகள்

முதன்மைப் பிரச்சினை:

$$f(X) = cX \tag{4·1}$$

என்னும் ஒருபடிச் சார்பு (linear function)

$$AX = b;\ X > O \tag{4·2}$$

என்னும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுமாறு $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்ற நிரல் வெக்டரைக் காண்க.

[இங்கு A ஒரு $m \times n$ $(m < n)$ அணி]

க—10

இருமைப் பிரச்சினை:

$$g\ (W) = W\ b \qquad (4{\cdot}3)$$

என்ற ஒருபடிச் சார்பு

$$W A \leqslant c \qquad (4{\cdot}4)$$

என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு இணங்க மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுமாறு $W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ என்ற நிரை வெக்டரைக் காண்க.

இருமைப் பிரச்சினையில் $w_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ என்ற மாறிகள் குறையல்லாத எண்களாக இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. இரண்டு பிரச்சினைகளுக்குமே $A = (a_{ij})$ பொது. b, c என்பன முறையே $m \times 1$ நிரல் வெக்டர், $1 \times n$ நிரை வெக்டர் எனக் கொள்க. W என்பது $1 \times m$ நிரை வெக்டராகும்.

இருமைப் பிரச்சினைக்கான கட்டுப்பாடுகள் (4·4)-ஐ

$$\begin{array}{l} a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \ldots + a_{m1} w_m \leqslant c_1 \\ a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \ldots + a_{m2} w_m \leqslant c_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \ldots + a_{mn} w_m \leqslant c_n \end{array}$$

என்று $w_1, w_2, \ldots, w_m$ என்னும் மாறிகளில் n சமனின்மைகளாக எழுதுகிறோம். w_i-களின் கெழுக்களின் அணி A-ன் திருப்பு அணி A' ஆகும்.

முதன்மைப் பிரச்சினையை மீச்சிறு மதிப்புக் காண்பதற்கான பிரச்சினையாக அமைத்துக்கொள்வது வழக்கமே தவிரக் கட்டாயம் அன்று. முதன்மைப் பிரச்சினை மீப்பெரு மதிப்புக் காணவேண்டிய பிரச்சினையாகவும் இருக்கலாம். அவ்வாறுயின் இருமைப் பிரச்சினை $g(W)$-ன் மீச்சிறு மதிப்புக் காண்பதற்கான பிரச்சினையாக மாற்றப்படவேண்டும். இனி இவ்விரு பிரச்சினைகளுடனும் தொடர்பு கொண்ட பின்வரும் தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுவோம்:

தேற்றம் (4.1) (இருமைத்தேற்றம்)

முதன்மை அல்லது இருமைப் பிரச்சினைகளுள் ஏதாவதொன் றிற்கு முடிவுள்ள எண்ணுக மீச்சிறு (மீப்பெரு) தீர்வு இருக்கு மாஞல், மற்றதற்கும் முடிவுள்ள எண்ணுக மீப்பெரு (மீச்சிறு) தீர்வு இருக்கும் என்பதோடு இவ்விரு தீர்வுகளும் தத்தம் குறிக் கோள் சார்புகளுக்குச் சம மதிப்புகளைக் கொடுக்கும். அதாவது, $\breve{X}$ அல்லது W, இவற்றுள் ஒன்று காணமுடிந்தால் மற்றதையும் காணமுடியும் ; தவிரவும், $f\,(X)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பும் $g\ (W)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பும் சமமாகும்.

இப்பிரச்சினைகளுள் ஒன்றுக்கு வரம்பற்ற (முடிவிலி) மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு தீர்வு இருப்பின் மற்றதற்குச் செய்தக்க தீர்வுகள் கிடையாது. (இருமைப்பிரச்சினையின் தீர்வு செய்தக்கதாக விருக்க $WA < c$ என்பது மட்டுமே உண்மையாக விருத்தல் போதுமானது; $W > O$ என்றிருக்கத் தேவையில்லை.)

நிறுவல் : முதற்கண் முதன்மைப் பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு காணப்பட்டது என்று கொள்வோம். பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாத வகையில் கெழுக்கள் அணி A – ன் முதல் m நிரல் வெக்டர்கள் $P_1 , P_2 , \ldots ,P_m$ இறுதிநிலை அடிப்படையை அமைக்கின்றன என்றும், இறுதிநிலையில்

$$\overline{X} = (X_1\ X_2\ \ldots\ X_m\ X_{m+1} \ldots X_n)$$

என்பது கெழுக்கள் அணி என்றும் கொள்வோம்.

$$B = (P_1\ P_2 \ldots P_m)$$

என்று எடுத்துக்கொண்டால், $P_j = BX_j,\ j = 1, 2, \ldots n$ ஆகும். தவிரவும், $A = B\overline{X},\quad I_m = (X_1\ X_2 \ldots X_m)$. மேலும் நாம்,

$$X_j = (x_{1j},\ x_{2j},\ \ldots, x_{mj}),\ \ j = m + 1, \ldots , n$$

என்றும் எழுதுவோம்.

இறுதிநிலையில் கெழுக்கள் அமைக்கும் அணி $\overline{X}$, நம்முடைய தற்கோள்களின்படி பின்வருமாறு எழுதப்படலாம்:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & x_{1,m+1} & \ldots & x_{1n} \\ 0 & 1 \ldots 0 & x_{2,m+1} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 & x_{m,m+1} & \ldots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

பிரச்சினையின் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு X_o என்றால்,

$$X_o = B^{-1}b$$

ஆகும். இவ்விறுதித் தீர்வுக்குப் பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன:

$$A = B\overline{X} \quad ; \quad B^{-1} A = \overline{X} \qquad (4\cdot5)$$

$$b = B X_o \quad ; \quad B^{-1} b = X_o \qquad (4\cdot6)$$

$$\text{மீச்சிறுமம் } f(X) = c_o\ X. \qquad (4\cdot7)$$

$$Z = c_o X - c < O \qquad (4\cdot8)$$

இங்கு, $c_o = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ என்பது ஒரு நிரைவெக்டர்.

$$Z = (c_0 X_1 - c_1, c_0 X_2 - c_2, \ldots, c_0 X_n - c_n)$$
$$= (z_1 - c_1, z_2 - c_2, \ldots, z_n - c_n)$$

என்பதும் ஒரு நிரை வெக்டரேயாகும்.

$$\left(z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n \right)$$

$z_i = c_i,\ i = 1, 2, \ldots m$ என்பதால் Z-ன் முதல் m மூலகங்கள் 0 ஆகும். மற்ற மூலகங்களும் மிகையல்லா எண்களே. ஏனெனில் இவை இறுதிநிலை மீச்சிறு தீர்விற்கான $z_j - c_j$-க்களாகும். (4·8)-ல் உள்ள O n-பரிமாண பூச்சிய நிரை வெக்டர் ஆகும்.

$$W_0 = (w_{10}, w_{20}, \ldots, w_{m0}) \text{ என்னும் வெக்டரை}$$

$$W_0 = c_0 B^{-1}$$

என்ற தொடர்பால் வரையறை செய்வோம். எனவே (4·5), (4·8) -களிலிருந்து

$$W_0 A - c = c_0 B^{-1} A - c$$
$$= c_0 X - c \leqslant O,$$

அல்லது $W_0 A \leqslant c$ என்று கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து இருமைப் பிரச்சினைக்கு W_0 ஒரு தீர்வு என்று தெரிகிறது. [சமனின்மை (4.4) நிறைவு செய்யப்படுகிறது.] மேலும், இத் தீர்வுக்குச் சரியான இருமைப் பிரச்சினையின் குறிக்கோள் சார்பு (4.3) -ன் மதிப்பு $g(W_0) = W_0 b$ ஆகும். எனவே (4.6) (4.7)-களிலிருந்து

$$W_0 b = c_0 B^{-1} b = c_0 X_0 = \text{மீச்சிறுமம் } f(X) \qquad (4.9)$$

என்பது தெளிவாகிறது. ஆகையால் முதன்மைப் பிரச்சினையின் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு அப்பிரச்சினையின் குறிக்கோள் சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்பைக் கொடுப்பதுடன் $g(W_0)$-க்கும் சமமாகிறது.

இனி $g(W)$ -ன் மீச்சிறுமதிப்பு $g(W_0)$ தான் என நிரூபிக்கின்றோம். சமன்பாடுகள் (4.1), (4.2)-களை நிறைவுசெய்யும் எந்த $n \times 1$ வெக்டர் X-க்கும், சமன்பாடு (4.3)-ஐ நிறைவுசெய்யும் எந்த $1 \times m$ வெக்டர் W-க்கும்

$$WAX = Wb = g(W) \qquad (4.10)$$

என்றும்

$$WAX \leqslant cX = f(X) \qquad (4.11)$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. இவ்விரண்டு தொடர்புகளிலிருந்தும்

$$g(W) < f(X) \qquad (4.12)$$

எல்லாச் செய்தக்க தீர்வுகளுக்கும் உண்மை எனத் தெரிகிறது. எனவே, உடனடியாக,

$$\text{மீப்பெருமம் } g(W) \leq \text{மீச்சிறுமம் } f(X) \qquad (4.13)$$

எனக் கிடைக்கிறது. எனவே இருமைப் பிரச்சினையின் செய்தக்க தீர்வு வெக்டர் W_0-க்கும் சமன்பாடு (4.9)–இலிருந்து

$$g(W_0) = W_0 b = \text{மீச்சிறுமம் } f(X)$$

என்பது உண்மையாகிறது. எனவே முதன்மைப் பிரச்சினையின் மீச்சிறு தீர்வு X_0-ம் இருமைப் பிரச்சினையின் மீப்பெரு தீர்வு W_0-ம் $g(W_0) = f(X_0)$ என்னுமாறு உள்ளன என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது, முதன்மைப் பிரச்சினையின் குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு இருமைப் பிரச்சினையின் குறிக்கோள் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பிற்குச் சமமாகும்.

மறுதலையாக, இருமைப் பிரச்சினைக்கு முடிவுள்ள எண்ணுகை மீப்பெரு தீர்வு இருக்குமானல் முதன்மைப் பிரச்சினை செய்தக்கது என்றும் அதன் மீச்சிறு தீர்விற்கான குறிக்கோள் சார்பு இருமைப் பிரச்சினையின் மீப்பெரு தீர்விற்கான குறிக்கோள் சார்புக்குச் சமம் என்றும் நிறுவுகிறோம். இந்த நோக்கத்தோடு முதன்மைப் பிரச்னையைக் கொடுத்துள்ள இருமைப் பிரச்சினையின் இருமைப் பிரச்சினையாக மாற்றியமைக்கிறோம்.

$$\begin{aligned} \text{மீப்பெருமம் } g(W) &= \text{மீப்பெருமம் } (Wb) \\ &= -\text{மீச்சிறுமம் } (-Wb) \end{aligned}$$

அல்லது

$-$மீப்பெருமம் (Wb) $=$ மீச்சிறுமம் $(-Wb)$ என்பதைக் கவனிக்கவும்.

கட்டுப்பாடுகள் (4.4)–ஐச் சமன்பாடுகளாக மாற்றத் தொய்வு மாறிகளை உட் புகுத்துகிறோம். இத் தொய்வு மாறிகள் அமைக்கும் வெக்டர் W_3 என்றல் சமனின்மை (4.4)-ஐ

$$WA + W_3 I = c, \; W_3 \geq O$$

என்று எழுதலாம். இங்கு I தகுந்த ஓரலகு அணியாகும். எந்த மெய் எண்ணையும் இரு மிகை மெய் எண்களின் வேறுபாடாக எழுதக் கூடுமாதலால்,

$$W = W_1 - W_2; \; W_1, W_2 \geq O$$

என்று எழுதலாம். இங்கு $w_i = w_{i1} - w_{i2}$, $w_{i1}, w_{i2} \geq 0$ ஆகும். கொடுத்துள்ள இருமைப் பிரச்சினை பின்வருமாறு எழுதப்படலாம்:

$$\left.\begin{array}{l}(W_1-W_2)\,A + W_3\,I = c\;;\\ W_1 \geqslant O;\, W_2 \geqslant O;\, W_3 \geqslant O\end{array}\right\} \quad (4{\cdot}14)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$(-W_1 + W_2)\,b + W_3\,O \quad (4{\cdot}15)$$

என்பதன் மீச்சிறு மதிப்புக் காண்க.

இந்த அமைப்பில் இருமைப் பிரச்சினை முதன்மைப் பிரச்சினையின் உருவில் இருக்கிறது. எனவே, நாம் நிரூபித்த இருமைத் தேற்றம் இதற்கும் பொருந்தும். இதன் இருமைப்பிரச்சினையைச் சரியான உருவில் அமைக்கக் கட்டுப்பாடு (4.14)-ஐ இருபுறமும் (−1) ஆல் பெருக்கி

$$-W_1A + W_2A - W_3I = -c \quad (4{\cdot}16)$$

என எழுதுகிறோம். (4.15), (4.17)–களின் இருமைப் பிரச்சினை வருமாறு:

$$(-A \mid A \mid -I)\,X \leqslant (-\,b \mid b \mid O)$$

என்ற கட்டுப்பாட்டிற்கு இணங்க

மீப்பெருமம் $(-cX)$ = − மீச்சிறுமம் (cX)–ஐக் காண்க.

அதாவது,

$$\left.\begin{array}{r}-A\,X \leqslant -\,b\\ A\,X \leqslant b\\ -\,I\,X \leqslant O\end{array}\right\} \quad \text{(அல்லது)} \quad \begin{array}{r}A\,X \geqslant b\\ A\,X \leqslant b\\ X \geqslant O\end{array}$$

(அல்லது)

$$A\,X = b;\; X \geqslant O$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

—மீப்பெருமம் $(-cX)$= மீச்சிறுமம் (cX) என்பதைக்காண்க.

ஆனால், இதுவே கொடுக்கப்பட்ட முதன்மைப் பிரச்சினையாகும். எனவே தேற்றத்தின் முதற்பகுதி முழுமையாக நிரூபிக்கப்பட்டது.

முதன்மைப் பிரச்சினையின் தீர்வு வரம்பற்றது என்றால் (4·12) - இலிருந்து $g\,(W) \leqslant -\infty$ (4·17) என்று ஆகும். இருமைப்பிரச்சினையின் கட்டுப்பாட்டுச் சமனின்மை (4.4) – ன் எந்தத் தீர்வும் இருமையின் குறிக்கோள் சார்பு (4.3) - க்கு அளிக்கும் மதிப்பு முதன்மையின் குறிக்கோள் சார்பு ஏற்கும் மதிப்புகளுக்கு ஒரு கீழ்வரம்பு ஆகும். இது $f\,(X)$ வரம்பற்றது என்பதற்கு முரண் ஆயிற்று. எனவே, இருமைப் பிரச்சினைக்குத்

தீர்வு இருக்கிறது என்ற நமது எடுகோள் தவறானது; அதாவது, இருமைக் கட்டுப்பாட்டுச் சமனின்மைகள் தம்முள் ஒவ்வாதவை (inconsistent). இதே போன்ற வாதங்களால் இருமைப் பிரச்சினை வரம்பற்ற தீர்வு பெற்றிருக்கும்போது முதன்மைப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண இயலாது என நிரூபிக்கலாம். தேற்றத்தின் நிரூபணம் நிறைவுபெற்றது.

(ஆ) சமச்சீர் பெற்ற முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகள்

முதன்மைப் பிரச்சினை

$$A X \geqslant b \ ; X \geqslant O \tag{4.18}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க ஒருபடிச் சார்பு

$$f(X) = c X \tag{4.19}$$

மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுமாறு

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

என்னும் வெக்டரைக் காண்க.

இருமைப் பிரச்சினை

$$W A \leqslant c \ ; W \geqslant O \tag{4.20}$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க ஒருபடிச் சார்பு

$$g(W) = Wb \tag{4.21}$$

மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுமாறு

$$W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

என்னும் வெக்டரைக் காண்க.

இந்த வமைப்பில் பிரச்சினைகளின் கட்டுப்பாடுகள் சமனின்மை களாகவே இருக்கின்றன. இவற்றுள் எதை வேண்டுமானாலும் முதன்மைப் பிரச்சினையாகவும், மற்றதை அதன் இருமையாகவும் கொள்ளலாம். மேலும், இந்தவமைப்பில் இரண்டு பிரச்சினை களிலுமே மாறிகள் குறையல்லாதவை என்று கட்டுப்பாடுகளைக் கொள்கிறோம். இனி, இந்த வமைப்பிற்கும் இருமைத் தேற்றம் பொருந்தும் என்று நிறுவுகிறோம்.

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

என்ற வெக்டர் தொய்வு மாறிகளை மூலகங்களாக கொண்டது என்றும் இதன் காரணமாகச் சமனின்மை (4·18) சமன்பாடாக மாறுகிறது என்றும் கொண்டால்,

$$A X - Y = b;$$
$$X \geqslant O; Y \geqslant O$$

என்று கட்டுப்பாடுகள் (4·18) மாறுகின்றன. பிரிப்பு அணிகளைப் (Partitioned matrices) பயன்படுத்தினுல் முதன்மைப் பிரச்சினை

$$\left.\begin{array}{l} (A \mid -I) \cdot \begin{pmatrix} X \\ \hline Y \end{pmatrix} = b \\ X \geqslant O; Y \geqslant O \end{array}\right\} \qquad (4·22)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$f(X, Y) = (c \mid \overline{O}) \begin{pmatrix} X \\ \hline Y \end{pmatrix} \qquad (4·23)$$

என்னும் ஒரு படிச் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்புக் காண வேண்டும் என்பதாக மாறுகிறது. (இங்கு $\overline{O}$ என்பது $1 \times m$ நிரை பூச்சிய வெக்டர்; $I = I_m$, m–பரிமாண ஓரலகு அணி எனக்கொள்கிறோம்.)

இத் திருத்தப்பட்ட முதன்மைப் பிரச்சினையின் இருமை பின்வருமாறு எழுதப்படக்கூடும்:

$$W (A \mid -I) \leqslant (c \mid \overline{O}) \qquad (4.24)$$

என்னும் கட்டுப்பாட்டிற்கு இணங்க

$$g(W) = W b \qquad (4.25)$$

என்னும் ஒருபடிச் சார்பை மீப்பெருமமாக்கும்

$$W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

என்னும் வெக்டரைக் காண்க.

கட்டுப்பாடு (4.24)

$$WA \leqslant c; \qquad -W I \leqslant \overline{O}$$

அல்லது

$$WA \leqslant c; \qquad W \geqslant O$$

என விரிந்து கட்டுப்பாடுகள் (4.20)-ஐக் கொடுக்கின்றன.

இவ்வாறு திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்சினைகள் சமச்சீரற்ற அமைப்பில் [பகுதி (அ)] இருப்பதால், அவற்றிற்கு (எனவே, கொடுத்துள்ள பிரச்சினைகளுக்கும்) இருமைத்தேற்றம் பொருந்தும்.

இனி, சமச்சீர் இருமைப் பிரச்சினைகள் செய்தக்க மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு தீர்வுகள் முறையே பெற்றிருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான கட்டுப்பாடுகளைத் தருகின்ற பின்வரும் தேற்றத்தை நிரூபிக்கின்றோம். இதைத் தொய்வு நிரப்புத் தேற்றம் (Complementary slackness theorem) என்று கூறுகிறோம்.

தேற்றம் (4.2) - (தொய்வு நிரப்புத் தேற்றம்)

முதன்மைப் பிரச்சினையின் செய்தக்க மீச்சிறு, இருமைப் பிரச்சினையின் செய்தக்க மீப்பெரு தீர்வுகளுக்குப்பின்வரும் கூற்று உண்மையாகும் : ஏதாவதொரு பிரச்சினையின் K ஆவது கட்டுப்பாடு சமனின்மை என்றால் (அதற்குச் சரியான தொய்வு மாறி மிகை என்க) மற்றதன் Kஆவது மாறி பூச்சியமாகும். Kஆவது மாறி ஏதாவதொன்றில் மிகையென்றால் மற்றதில் Kஆவது தொடர்பு சமன்பாடாகும். (அதற்குச்சரியான தொய்வு மாறி பூச்சியமாகும்.)

நிறுவல் : x_{n+i}, $i = 1, 2, \ldots, m$ என்னும் குறையல்லாத் தொய்வு மாறிகளைப் புகுத்தி $AX \geqslant b$ என்ற சமனின்மையை

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \end{array}\right\} \quad (4\cdot26)$$

என்ற சமன்பாடுகளாக எழுதுக. இம்மாதிரியே w_{m+j}, $j = 1, 2, \ldots, n$ என்ற குறையல்லாத் தொய்வு மாறிகளைச் சேர்த்து $WA \leqslant c$ என்னும் சமனின்மையை

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m + w_{m+1} = c_1 \\ a_{12}w_1 + \ldots + a_{m2}w_m + w_{m+2} = c_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m + w_{m+n} = c_n \end{array}\right\} \quad (4\cdot27)$$

என்ற சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

வெளிப்படையாக முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகளின் குறிக்கோள் சார்புகளை

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = f(X) \quad (4.28)$$

$$b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_mw_m = g(W) \quad (4.29)$$

என எழுதலாம்.

சமன்பாடுகள் (4.26)-ன் i ஆவது சமன்பாட்டை w_i ஆல் பெருக்கி, $i = 1, 2, \ldots, m$ மதிப்புகளுக்கு இம்மாதிரி கிடைத்த சமன்பாடுகளைக் கூட்டி, அத்தொகையை (4.28)-லிருந்து கழித்தால்,

$$\left(c_1-\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\, w_i\right)x_1+\left(c_2-\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\, w_i\right)x_2+\dots$$

$$+\left(c_n-\sum_{i=1}^{m} a_{in}\, w_i\right)x_n$$

$$+\sum_{i=1}^{m} w_i\, x_{n+i} = f(X)-\sum_{i=1}^{m} w_i\, b_i$$

எனக் கிடைக்கிறது.

ஆனல் (4.27) - லிருந்து

$$w_{m+j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$$

என்று கிடைப்பதால் இதையும் (4.29)-ஐயும் பயன்படுத்தி

$$\begin{aligned} & w_{m+1}\, x_1 + w_{m+2}\, x_2 + \dots + w_{m+n}\, x_n \\ & \quad + w_1\, x_{n+1} + w_2\, x_{n+2} + \dots w_m\, x_{n+m} \\ & = f(X) - g(W) \end{aligned} \tag{4.30}$$

என்று எழுதலாம்.

இருமைத் தேற்றத்திலிருந்து மீச்சிறு, மீப்பெரு தீர்வுகள் முறையே

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$$
$$W_0 = (w_{10}, w_{20}, \dots, w_{m0})$$

என்ருல்

$$f(X_0) - g(W_0) = 0$$

ஆகும். எனவே (4.30) இப்பொழுது

$$\begin{aligned} & w_{m+1,0}\, x_{10} + w_{m+2,0}\, x_{20} + \dots + w_{m+n,0}\, x_{n0} \\ & \quad + w_{10}\, x_{n+1,0} + w_{20}\, x_{n+2,0} + \dots + w_{m0}\, x_{n+m,0} = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

என்று மாறுகிறது. இங்கு $x_{n+i,0} \geqslant 0$, $w_{m+j,0} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ என்பன தீர்வுகள் X_0, W_0 - களுக்குச் சரியான தொய்வு மாறிகளாகும்.

$w_{m+j,0} \cdot x_{j0}$ என்பது இருமையின் j ஆவது தொய்வு மாறியையும், முதன்மையின் jஆவது மாறியையும் பெருக்கியதன் பலனுகும்.

அதேபோன்று $w_{i0}\ x_{n+i,0}$ முதன்மையின் i ஆவது தொய்வு மாறியையும், இருமையின் iஆவது மாறியையும் பெருக்கியதன் பலனாகும். எல்லா மாறிகளும் (தொய்வு மாறிகள் உட்பட) குறையல்லாதவை எனக் கொள்ளப்படுவதால் (**4.31**)–ன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் குறையல்லாதது. ஆனால், இவற்றின் கூடுதல் பூச்சியம் ஆக வேண்டும் என்பதால் அவை ஒவ்வொன்றும் பூச்சியம் ஆகவேண்டும். எனவே,

$$w_{m+j,0}\ x_{j0} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots n$$

$$w_{i0}\ x_{n+i,0} = 0, \qquad i = 1, 2, \dots m$$

ஆகையால் $w_{m+k,0} > 0$ என்றால் $x_{k0} = 0$ என்றும் $x_{n+l,0} > 0$ என்றால் $w_{l0} = 0$ என்றும் இருக்க வேண்டும். மேலும், $x_{k0} > 0$ என்றால் $w_{m+k,0} = 0$ என்றும், $w_{l0} > 0$ என்றால் $x_{n+l,0} = 0$ என்றும் கூட இருக்க வேண்டும்.

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

குறிப்பு: (1) இருமைத்தேற்றத்தைப் பின்வருமாறும் கூறலாம் : முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகளுக்குச் செய்தக்க தீர்வுகள் இருக்குமானால், இரண்டிற்கும் ஓர் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு (**optimum solution**) இருப்பதோடு $f(X)$-ன் மீச்சிறு மதிப்பும் $g(W)$-ன் மீப்பெரு மதிப்பும் சமமாகும்.

(2) எந்தச் சோடி முதன்மை - இருமைப் பிரச்சினைகளுக்கும் பின்வரும் கூற்றுகளுள் ஒன்று உண்மையாகும்:

(அ) இரண்டிற்கும் முடிவுள்ள இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வுகள் உள்ளன;

(ஆ) ஒன்றுக்கு இறுதிச் சிறப்புச் செய்தக்க தீர்வு இருந்து, மற்றதற்குச் செய்தக்க தீர்வுகள் இல்லை;

(இ) இரண்டிற்குமே செய்தக்க தீர்வுகள் இல்லை.

(3) சமச்சீர் பெற்ற இருமைப் பிரச்சினைகளை அட்டவணை உருவில் குறிப்பது வழக்கம். அட்டவணை (**4.1**)-ல் இது காட்டப்பட்டுள்ளது. A-ன் நிரைகளுக்கும் x-களின் நிரைக்கும் உட்பெருக்கல் காணின் முதன்மைப் பிரச்சினையின் கட்டுப்பாடுகளும், A-ன் நிரல்களுக்கும் w-களின் நிரல்களுக்கும் உட்பெருக்கல் காணின் இருமைப் பிரச்சினையின் கட்டுப்பாடுகளும் கிடைக்கின்றன. $x_i \geqslant 0$; $w_j \geqslant 0$ என்பனவும் அட்டவணையில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

அட்டவணை (4.1)

$\geqslant 0$	x_1	x_2	·	·	x_j	·	·	x_n	$\geqslant$
w_1	a_{11}	a_{12}	·	·	a_{1j}	·	·	a_{1n}	b_1
w_2	a_{21}	a_{22}	·	·	a_{2j}	·	·	a_{2n}	b_2
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
w_i	a_{i1}	a_{i2}	·	·	a_{ij}	·	·	a_{in}	b_i
·	·	·	·	·		·	·	·	·
·	·	·	·	·		·	·	·	·
w_m	a_{m1}	a_{m2}	·	·	a_{mj}	·	·	a_{mn}	b_m
$\leqslant$	c_1	c_2	·	·	c_j	·	·	c_n	மீப்பெருமம் / மீச்சிறுமம்

சமச்சீர் பெற்ற முதன்மை–இருமைப் பிரச்சினை

4·2· இலெம்கேயின் (Lemke) இருமை–சிம்ப்ளக்ஸ் முறை

§3·3·ல் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையை விவரித்துள்ளோம் அல்லவா? இதேபோன்று இருமைப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வுகாணும் வழியை இந்தப் பகுதியில் விவரிக்கின்றோம். சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக் கணக்கீட்டின் ஒருநிலையில் $X_1, X_2, \ldots, X_m$ என்பன அடிப்படை மாறிகளையும், $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$ என்பன அடிப்படையல்லா மாறிகளையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். §3·3–ல் கண்டபடி, குறிக்கோள் சார்பையும், அடிப்படை மாறிகளையும் அடிப்படையல்லா மாறிகள் மூலமாக

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= x_{00} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{0j}\,(-X_{m+j}) \\ X_i &= x_{io} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{ij}\,(-X_{m+j}) \\ i &= 1, 2, \ldots\, m \end{aligned}\right\} \qquad (4\cdot 32)$$

என்று எழுதலாம். X_l என்ற மாறியை அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் X_{m+k}-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும் மாற்றி அமைக்

கும்போது புதுக் கெழுக்களை x'_{ij} எனக் குறித்தால் பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன என்று கண்டோம்.

[சமன்பாடுகள் (3·27)-ஐப் பார்க்கவும்]—

$$\left.\begin{aligned} x'_{lk} &= \frac{1}{x_{lk}} \\ x'_{lj} &= x_{lj}\, x'_{lk} \\ x'_{ik} &= -x_{ik}\, x'_{lk} \\ x'_{ij} &= x_{ij} - x_{ik}\, x'_{lj} \end{aligned}\right\} \quad i \neq l,\ j \neq k \qquad (4{\cdot}33)$$

இந்த மாற்றங்களில் உள்ள சமச்சீர் தன்மையைப் பற்றி முன்னரே கூறினேம். இதை இப்பகுதியில் மேலும் ஆராய்கிறேம்.

சமன்பாடுகள் (4·32)-ன் கெழுக்களின் அணியைப் பின்வரும் சமன்பாடுகளின் கெழுக்களின் அணியாகவும் கருதலாம்:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= x_{00} + \sum_{i=1}^{m} x_{i0}\ \ Y_i \\ Y_{m+j} &= x_{0j} + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\ \ Y_i \\ j &= 1, 2, \ldots, n-m \end{aligned}\right\} \qquad (4{,}34)$$

சமன்பாடுகள் (4,34)-ல் Y_1, $Y_2, \ldots, Y_m$-களை அடிப்படையல்லா மாறிகள் என்றும், Y_{m+1}, Y_{m+2}, …, Y_n-களை அடிப்படை மாறிகளாகவும் எடுத்துக்கொள்வோம். இனி Y_l-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும், Y_{m+k}-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் மாற்றி எழுதும்போது கெழுக்களின் மாறும் தன்மை சமன்பாடுகள் (4·33)-களாலேயே தரப்படுகின்றன என்பதை எளிதில் சரிபார்க்கலாம். எல்லா x_{i0}, x_{0j}-களும் குறையல்லா எண்களாகும்போது சிம்ப்ளக்ஸ் முறை இறுதி நிலையை அடைகிறது என்றும் x_0 மீப் பெரு மதிப்பைப் பெறும் என்றும் முன்னரே கூறினேம். இந்த நிலையில் y_0–ன் மதிப்பு ஒரு மீச்சிறுமமாகும்.

எனவே (4·32)-ஐ முதன்மைப் பிரச்சினை என்று கூறினல் (4·34)-ஐ இருமைப் பிரச்சினை என்று கூறலாம். [(4·34) முதன்மைப் பிரச்சினையாகவும் எடுத்துக்கொள்ளப்படலாம். ஆனல் இப்போது (4·32) இருமைப் பிரச்சினையாகும்.] இருமைப் பிரச்சினைக்குச் செய்

தக்க தீர்வு இருப்பதாகக்கொண்டால் x_{0j}-க்கள் யாவும் குறையல்லா எண்கள் ஆகும். மேலும், முன்னோடித் தீர்வு இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வைக் கொடுக்க வேண்டும். இம்மாதிரி முன்னோடித் தீர்வை இருமை செய்தக்க தீர்வு என்கிறோம்.

அடிப்படை மாறிகளின் குறிகளை ஆராய்ந்து x_{i0}-கள் யாவும் குறையல்லா வெண்கள்தாமா என்று கண்டறிய வேண்டும். ஏதாவதொன்று குறையானாலும் முன்னோடித் தீர்வு செய்தக்க தன்று. அதாவது, நடைமுறை அடிப்படையல்லா மாறிகளில் எழு தப்பட்ட ஒரு கட்டுப்பாட்டுச் சமனின்மை இந்த அடிப்படை மாறி குறை மதிப்பைப் பெறுகின்ற வகையில் சோதனைத் தீர்வு நிறைவு செய்யாமல் உள்ளது. இந்தக் கட்டுப்பாட்டையும் நிறைவு செய் கின்றதும், முன்னர் நிறைவு செய்த எல்லாக் கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்கின்றதுமான மிகச் சிறந்த (best) தீர்வைக் காண் கிறோம். புதுக் கட்டுப்பாடு ஒரு சமன்பாடாக மாற்றப்பட்டு நிறைவு செய்யப்படுகிறது. மேலும், ஓர் அடிப்படையல்லா மாறி மிகை மதிப்பைப் பெறும். இந்த மாறிகள் மாற்றம் செய்வதோடு நமது தீர்வு சற்றே தரமானதாக மாறுகிறது. திரும்பத் திரும்ப இம் முறையைப் பயன்படுத்தி எல்லாக் கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்கிற ஒரு செய்தக்க தீர்வைக் காண்கிறோம்.

இந்த முறையை 'வெட்டு தளமுறை' (Cutting plane method) என்று கூறுகிறோம். இது இருமைச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைதான் எனினும் இருமைப்பண்பு வெளிப்படையாகக் கூறப்படுவதில்லை. ஒரு பிரச்சினையின் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு அதன் இருமைக்குக் கொடுக்கும் செய்தக்க பிரதேசம் அப் பிரச்சினையின் செய்தக்க பிரதேசத்தைவிடப் பெரியது. ஒரு கட்டுப்பாடு அல்லது வெட்டுந் தளத்தைக் கண்டு, அதன் வழியாக, உண்மையிலேயே செய்தக்க தீர்வுகளைக் கொடுக்கும் புள்ளிகளை உள்ளடக்கியதும், ஆனால், நமது முன்னோடித் தீர்வு உட்படச் சில பகுதியை நீக்கியதுமான, முந்திய பிரதேசத்தைவிடச் சிறிய பிரதேசம் ஒன்றைக் காண் கிறோம். இந்தப் புதுக் கட்டுப்பாட்டையும் எடுத்துக்கொண்டு பிரச்சினைக்கு வேறு தீர்வு காண்கிறோம்.

இனி, இருமைப் பிரச்சினைக்கு எங்ஙனம் ஒரு முதனிலை செய் தக்க தீர்வு காண்பது என்பதைப் பார்ப்போம். ஏதாவது பொறுக்கி யெடுக்கப்பட்ட அடிப்படை மாறிகளில் கட்டுப்பாடுகளை எழுதவும். x_{0j}-க்கள் யாவும் குறையல்லா வெண்கள் என்றால் செய்தக்க தீர்வு கிடைத்துவிட்டது. சில x_{0j} - க்கள் குறையெண்கள் என்றால்

அவற்றுள் மிகவும் குறையானது x_{0k} என்க. பிரச்சினையில் பின் வரும் புதிய கட்டுப்பாட்டைப் புகுத்துவோம்:

$$x_{n+1} = N+\sum_{j=1}^{n-m}(-X_{m+j})$$

இங்கு N நம் விருப்பத்திற்கு உகந்தவாறு ஏதாவதொரு பெரிய எண் (arbitrarily large number). அடிப்படையல்லா மாறிகளின் கூடுதல் N-ஐ விடக் குறைவாகவோ அல்லது அதற்குச் சம மாகவோ இருக்க வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு பிரச்சினையின் முடிவுள்ள (finite) தீர்வை விலக்காது. கடைசியாக x_{n+1}-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் X_{m+k}-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும் மாற்றுக. இந்த நிலையில் பிரச்சினை இருமை செய்தக்கதாக மாறிவிடுகிறது. ஆனால், இப்பொழுது அட்டவணையில் ஒரு நிரல் கூடுதலாகவிருக்கும். காரணம் யாதெனின், சில அடிப்படை மாறிகள் N-ஐயும் ஒரு மாறிலி உறுப்பாகப் பெற்றிருக்கும். பிரச்சினையின் தீர்வு வரம்பற்றது எனின் இறுதி நிலை வரையில N தீர்வில் இருக்கும். வரம்புள்ள தீர்வு பிரச்சினைக்கு இருந்தால் x_{n+1} இறுதிநிலையில் அடிப்படை மாறியாகிவிடும். அப்பொழுது அதையும் எல்லா N-களையும் நீக்கிவிடலாம். §4·3-ல் எடுத்துக்காட்டு **(2)** இம் முறையை விளக்குவதற்காகத் தரப்பட்டுள்ளது.

மேலும் விவரங்களுக்குப் பின்வரும் கட்டுரையைப் பார்க்கவும்; C. E. Lemke, The dual method of solving the linear programming problem, Naval Research Logistics Quarterly 1, (1954) பக்கங்கள் 36–47.

4.3. எடுத்துக்காட்டுகள்

சென்ற இரண்டு பகுதிகளிலும் விவரித்த முறைகளை விளக்கும் வகையில் சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு (1) : $x_0 = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3$ - ன் மீச்சிறு மதிப்பைப் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 1\\
4x_2 + 5x_3 - x_4 \qquad\qquad &= 4\\
x_2 + 2x_3 \qquad - x_5 \qquad &= 1\\
5x_2 + 3x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 4\\
x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6.&
\end{aligned}$$

தீர்வு: [§ 3. 1, எடுத்துக்காட்டு (1)-ஐப் பார்க்கவும்].

கொடுத்துள்ள கட்டுப்பாடுகளைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்: (இவ்வாறு செய்யாமல் நேரிடையாகவே சில செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்தித் தீர்வு காண இயலும்.)

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\
5x_1 + x_2 + x_4 &= 1\\
2x_1 + x_2 + x_5 &= 1\\
-3x_1 + 2x_2 + x_6 &= 1\\
x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6.
\end{aligned}$$

வழக்கமான குறியீட்டில்

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c = (3, 4, 7, 0, 0, 0)$$
$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

என்று எழுதினால்,

$$A\,X = b, \quad X \geqslant O$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $c\,.\,X$-ன் மீச்சிறு மதிப்புக் காண வேண்டும்.

கொடுத்துள்ள பிரச்சினையின் இருமையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\begin{aligned}
w_1 &\leqslant 3\\
w_1 + 4w_2 + w_3 + 5w_4 &\leqslant 4\\
w_1 + 5w_2 + 2w_3 + 3w_4 &\leqslant 7\\
-w_2 &\leqslant 0\\
-w_3 &\leqslant 0\\
w_4 &\leqslant 0
\end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாடுக்களுக்கு இணங்க

$$w_1 + 4w_2 + w_3 + 4w_4$$

என்ற ஒருபடிச் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு காண்க.

அட்டவணை (4.2) - இலிருந்து முதன்மைப் பிரச்சினையின் குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பிற்கான அடிப்படை

$$B = (P_3 \ \ P_1 \ \ P_5 \ \ P_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ஆகும். மேலும் மீச்சிறுத் தீர்வு

$$X_0 = B^{-1}\, b = \left(\frac{4}{13}, \ \frac{1}{13}, \ \frac{3}{13}, \ \frac{8}{13}, \right)$$

என்றும்

$$C_0 = (7, 3, 0, 4) = (c_3, c_1, c_5, c_2)$$

என்றும் எழுதலாம். எனவே குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$C_0 \cdot X_0 = (7, 3, 0, 4) \cdot \left(\frac{4}{13}, \ \frac{1}{13}, \ \frac{3}{13}, \ \frac{8}{13}, \right)$$

$$= \frac{63}{13}$$ (இது அட்டவணையில் நேரிடையாகக் காணப்பட்டது)

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் இறுதி நிலை அணியை $\overline{X}$ என்று குறிப்பிட்டால் $P_j = B\, X_j$ என்ற தொடர்புகளைக் கொண்டு X_j-க்களைக் காண முடியும். அட்டவணை (4.2)-இலிருந்து

அட்டவணை (4–2)

i	c	அடிப்படை	P_0	3 P_1	4 P_2	7 P_3	0 P_4	0 P_5	0 P_6	
1	7	P_3	1	1	1	1	0	0	0	முதனிலை
2	0	P_4	1	$\boxed{5}$	1	0	1	0	0	→
3	0	P_5	1	2	1	0	0	1	0	
4	0	P_6	1	−3	2	0	0	0	1	
5			7	4 ↑	3	0	0	0	0	
1	7	P_3	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	இரண்டாம் நிலை
2	3	P_1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	
3	0	P_5	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	1	0	
4	0	P_6	$\frac{8}{5}$	0	$\boxed{\frac{13}{5}}$	0	$\frac{3}{5}$	0	1	→
5			$\frac{31}{5}$	0	$\frac{11}{5}$ ↑	0	$-\frac{4}{5}$	0	0	
1	7	P_3	$\frac{4}{13}$	0	0	1	$-\frac{5}{13}$	0	$-\frac{4}{13}$	இறுதி நிலை
2	3	P_1	$\frac{1}{13}$	1	0	0	$\frac{2}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$	
3	0	P_5	$\frac{3}{13}$	0	0	0	$-\frac{7}{13}$	1	$-\frac{3}{13}$	
4	4	P_2	$\frac{8}{13}$	0	1	0	$\frac{3}{13}$	0	$\frac{5}{13}$	
5			$\frac{63}{13}$	0	0	0	$-\frac{17}{13}$	0	$-\frac{11}{13}$	

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{13} & 0 & \frac{-4}{13} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{-1}{13} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{13} & 1 & \frac{-3}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{13} & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

$$= (\ X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5 \quad X_6\ )$$

மீச்சிறு தீர்வுக்குச்சரியான வெக்டர் **Z**-ஐ இப்பொழுது

$$\mathbf{Z} = C_0\,\overline{X} - C$$

$$= (\,7, 3, 0, 4)\ \overline{X} - (\,3, 4, 7, 0, 0, 0\,)$$

$$= \left(3, 4, 7, -\frac{17}{13}, 0, -\frac{11}{13}\right) - (\,3, 4, 7, 0, 0, 0\,)$$

$$= \left(0, 0, 0, -\frac{17}{13}, 0, -\frac{11}{13}\right)$$

என்று கிடைக்கிறது. Z-ன் மூலகங்கள் அட்டவணை (4.2)-ன் இறுதிநிலையின் கடைசிநிரையாகும், அதாவது, $z_j - c_j$-க்கள் ஆகும். இவையாவும் மிகையல்லா எண்கள் என்பதை கவனிக்கவும்.

பாடம் 1-ன் § 5-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் அணி ஓர் ஓரலகு அணியைப் பெற்றிருந்தாலும் அல்லது பெற்றிருக்குமாறு விரிவுபடுத்தப்பட்டாலும், முழு நீக்க முறைப்படி தீர்வு காணும்போது அடிப்படையின் தன்மாற்று அணியாக இவ்வோரலகு அணி மாற்றம் பெறுகிறது எனப் பார்த்தோம். இந்தப் பண்பு நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் தீர்வை சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி காண்பதற்கும் பொருந்தும். கொடுக்கப்பட்ட கெழுக்கள் அணி A ஓரலகு அணியைப் பெற்றிருந்தால் அல்லது பெறுமாறு எழுதப்பட்டால், ஒவ்வொரு முறை சிம்ப்ளக்ஸ் முறை பயன்படுத்தப்படும் போதும் அடிப்படையின் தன்மாற்று அணியின் ஒத்த நிரல்களாக உருப்பெறும். நமது எடுத்துக் காட்டில் A என்ற கட்டுப்பாடுகள் கொடுக்கும் அணி P_3, P_4, P_5, P_6 என்ற நிரல் வெக்டர்கள் மூலமாக 4×4 ஓரலகு அணியைப் பெற்றுள்ளது. எனவே இறுதிநிலை அட்டவணையில் X_3, X_4, X_5, X_6 என்ற நிரல் வெக்டர்கள் B^{-1}-ஐ அமைக்கும்.

எனவே

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{13} & 0 & \frac{-4}{13} \\ 0 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{-1}{13} \\ 0 & \frac{-7}{13} & 1 & \frac{-3}{13} \\ 0 & \frac{3}{13} & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

இருமைத் தேற்றத்தில் கண்டவாறு, இருமைப் பிரச்சினையின் மீப்பெரு தீர்வு W_0 -ஐ

$$W_0 = C_0 B^{-1}$$

என எழுதினால்

$$W_0 = (7, 3, 0, 4)\ B^{-1}$$

$$= \left(7, -\frac{17}{13}, 0, -\frac{11}{13}\right)$$

என்று தெரிகிறது. இதுவே தேவையான இருமைப் பிரச்சினையின் மீப்பெரு தீர்வு ஆகும். இந்தத் தீர்வை இருமையின் கட்டுப்பாடு களில் ஈடு செய்து அது செய்தக்க தீர்வுதானா எனச் சரி பார்க்க லாம்.

$$W_0\ A = \left(7, -\frac{17}{13}, 0, -\frac{11}{13}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3, 4, 7, 0, 0, 0)$$

$$< C$$

மேலும் இருமையின் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு

$$W_0 \cdot b = \left(7, -\frac{17}{13}\ 0\ -\frac{11}{13}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 7 - \frac{17}{13} + 0 - \frac{11}{13}$$

$$= \frac{63}{13}$$

$$= C_0 \cdot X_0$$

நமது தீர்விலிருந்து $W > O$ என்பது இருமையின் செய்தக்க தன்மைக்குக் கட்டுப்பாடு ஆகாது என்பதையும் அறியலாம்.

எடுத்துகாட்டு (2) : $x_0 = 4x_1 - 9x_2 + 2x_3$-ன் மீப்பெரு மதிப்பை இலெம்கேயின் முறைப்படி பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக்காண்க:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 5$$
$$x_j \geq 0 \;,\; j=1,2,\ldots,5$$

தீர்வு: பிரச்சினையை இருமைச் செய்தக்கதாக மாற்ற x_6 என்ற குறையல்லா மாறியை (நம்விருப்பப்படி N-ஐ மிகப் பெரிய எண்ணுக எடுத்துக்கொண்டு)

$$x_6 = N - x_1 - x_2 - x_3$$

என்றவாறு எடுத்துக்கொள்வோம். x_0-ல் $(-x_1)$ -ன் கெழு மிகவும் குறையாக விருப்பதால் x_1-ஐ அடிப்படை மாறியாக மாற்று கிறோம். மற்ற அடிப்படையல்லா மாறிகளாக x_2 x_3 –களை இருத்திக் கொண்டு பின்வரும் சமன்பாடுகளை எழுதலாம்:

$$\begin{aligned} x_0 &= 4N - 13x_2 - 2x_3 - 4x_6 \\ x_1 &= N - x_2 - x_3 - x_6 \\ x_4 &= -2N+7+ 5x_2 + x_3 + 2x_6 \\ x_5 &= N-5- 3x_2 + 2x_3 - x_6 \end{aligned}$$

இந்த நிலையில் $x_2 = x_3 = x_6 = 0$ என்னும் போது x_4 குறையெண் ஆகிறது. எனவே தீர்வு செய்தக்கது அல்ல. தீர்வு இருமைச் செய் தக்கதாக விருக்க x_4–ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் x_4 –க்கான சமன்பாட்டில் மிகச்சிறிய மிகைக்கெழு பெற்ற x_3-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும் மாற்றுகிறோம்.

எனவே,

$$\begin{aligned} x_0 &= 14 - 3x_2 - 2x_4 \\ x_1 &= -N+7 + 4x_2 - x_4 + x_6 \\ x_3 &= 2N-7 - 5x_2 + x_4 - 2x_6 \\ x_5 &= 5N-19 - 13x_2 + 2x_4 - 5x_6 \end{aligned}$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

இந்தநிலையில் தீர்வுகண்டால் x_1 குறையெண் ஆகிறது. அதற்கானச் சமன்பாட்டில் x_6 -தான் மிகக்குறைந்த மிகைக் கெழு பெற்றுள்

ளது. ஆகையால் x_6-ஐ அடிப்படை மாறியாக்கி x_1 அடிப்படை யல்லா மாறியாக்குகிறோம். எனவே,

$$x_0 = 14 - 3x_2 - 2x_4$$
$$x_6 = N - 7 + x_1 - 4x_2 + x_4$$
$$x_3 = 7 - 2x_1 + 3x_2 - x_4$$
$$x_5 = 16 - 5x_1 + 7x_2 - 3x_4$$

என்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இந்த நிலையில் இருமை செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கிறது. x_6, N-களை நீக்கிவிட்டால் தேவை யான தீர்வு பின்வரும் சமன்பாடுகளால் பெறப்படுகின்றன.

$$x_0 = 14 - 3x_2 - 2x_4$$
$$x_3 = 7 - 2x_1 + 3x_2 - x_4$$
$$x_5 = 16 - 5x_1 + 7x_2 - 3x_4$$

குறிக்கோள் சார்பில் அடிப்படையல்லா மாறிகளின் கெழுக்கள் குறையெண்கள் ஆதலின் x_2, x_4, x_1 களின் மதிப்பைக்கூட்டி x_0-ன் மதிப்பை அதிகரிக்க முடியாது. எனவே, நமது செய்தக்க தீர்வே இறுதி மீப்பெருத்தீர்வு ஆகும். x_0-ன் மீப்பெரு மதிப்பு14ஆகும். $x_1 = x_2 = x_4 = 0$; $x_3 = 7$, $x_5 = 16$ என்பன கொடுத்துள்ள கட்டுப்பாடு களை நிறைவு செய்கின்றன என்பதையும் சரிபார்த்து அறியலாம்.

பயிற்சிகள்—பாடம்-4.

(4.1) பின் வரும் பிரச்னையின் இருமையை எழுதி அதன் தீர்வு காண்க:

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$$
$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 > 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$2x_1 + 3x_2 + x_3$ -ன்

மீப்பெரு மதிப்பு காண்க.

குறிப்பு: கொடுக்கப்பட்ட பிரச்னையின் இருமை

$$4w_1 - 4w_2 + w_3 - w_4 > 0$$
$$3w_1 - 3w_2 + 2w_3 - 2w_4 > 3$$
$$w_1 - w_2 + 5w_3 - 5w_4 > 1$$
$$w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad > 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$6w_1 - 6w_2 + 4w_3 - 4w_4$ — ன்

மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்பதாகும்.

(4.2)
$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$
$$2x_2 + 5x_3 \leq 10$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$3x_1 + 5x_2 + 4x_3$-ன்

மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்பதற்கான பிரச்சினையின் இருமையை எழுதித் தீர்வு காண்க.

குறிப்பு: § 3.5, எடுத்துக்காட்டு (1)-ஐப்பார்க்கவும்.

(4.3) இலெம்கேயின் முறைப்படி $3x_1 - x_2 + 2x_3$-ன் மீப்பெரு மதிப்பை, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$,
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$2x_2 + x_3 \geq 8$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க. (பீல்)

குறிப்பு: x_4, x_5 என்னும் குறையல்லாத் தொய்வு மாறிகளை உட்புகுத்திப் பின்னர் இலெம்கேயின் முறையை § 4.3 எடுத்துக்காட்டு (2) -ல் விளக்கியவாறு பயன் படுத்தவும்.

(4.4) முதன்மை— இருமைப் பிரச்சினைகளுக்குப் பின்வரும் நேர்த்தியான வடிவ கணித விளக்கம் தர முடியும்:

$$AX = b$$
$$X \geq O$$

மீச்சிறுமம் cX என்பது முதன்மைப் பிரச்னை என்றும்

$$WA \leq c$$

மீப்பெருமம் Wb என்பது இருமைப்பிரச்சினை என்றும் கொள்க. $A = (P_1 P_2 \ldots P_n)$ என்ருல் நிரல் வெக்டர்கள் P_j இருமையின் j-வது கட்டுப்பாடு குறிக்கும் அரை வெளிக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். மேலும் b என்னும் வெக்டர் $Wb = Z$ என்னும் அதிபர தளத்தின் செங்கோடு(normal) ஆகும்.

இந்தப் பண்பை, $x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0$
$$2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$$
$$-2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2$$
மீச்சிறுமம் $3x_1 + 4x_2 + 2x_3$

என்ற பிரச்னைக்கு இருமையை எழுதி இரண்டு பிரச்சினைகளுக்கும் வடிவ கணித அமைப்புகளை வரைந்து சரி பார்க்கவும். (ஹாட்லி)

(4.5) இருமை சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தி

$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2$$
$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1$$
$$x_j > 0, j = 1, 2, 3, 4, 5,$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க

$$x_3 + x_4 + x_5$$

என்னும் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்புக் காண்க. (காஸ்)

(4.6) பின்வரும் இரு பிரச்சினைகளை எடுத்துக் கொள்க

பிரச்னை (அ)

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 < d$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 < e$$
$$x_j > 0 \ (j = 1, 2, 3,)$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = x_0$$

என்பதற்கு மீப்பெரு மதிப்புக் கொடுக்கும் தீர்வு காண்க.

பிரச்னை (ஆ)

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 > a$$
$$b_1 u_1 + b_2 u_2 > b$$
$$c_1 u_1 + c_2 u_2 > c$$
$$u_1 > 0 ; u_2 > 0$$

என்ற கட்டுபாடுகளுக்கு இணங்க

$$du_1 + eu_2 = u_0$$

என்பதற்கு மீச்சிறு மதிப்புக் கொடுக்கும் தீர்வு காண்க.

(*i*) தொய்வு மாறிகளை உட்புகுத்தி இரு பிரச்சினைகளின் சமன்பாடுகளும் இருமைப் பிரச்சினைகளாக மாறுகின்றன எனக் காட்டுக.

(*ii*) பிரச்சினை (அ)– க்குச் செய்தக்க வரம்புக்குட்பட்ட இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு உண்டு எனக் கொண்டு அதை (x^*_1, x^*_2, x^*_3) எனக் குறிக்கவும்.

$x^*_0 = ax^*_1 + bx^*_2 + cx^*_3$ என்றால் $x^*_0 \leqslant u_0 = du_1 + eu_2$ என்பது அனைத்து $u_1, u_2,$ - க்களின் செய்தக்க மதிப்புகளுக்கும் உண்மை என நிரூபிக்கவும்.

(*iii*) பிரச்சினை (ஆ)-க்குச் செய்தக்க வரம்புக்குட்பட்ட இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு $(u^*_1, u^*_2,)$ உண்டு எனவும், $u^*_0 = du^*_1 + eu^*_2$ என்றும் கொண்டு அனைத்துச் செய்தக்க மதிப்புகள் x_1, x_2, x_3-களுக்கும்

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = x_0 \leqslant u^*_0$$

என்று நிரூபிக்கவும்.

(*iv*) மேலே கூறியதிலிருந்து u^*_0 என்பது x_0-ன் மேல் வரம்பு (upper bound) எனத் தெரிகிறது. x_0 - ன் மீச்சிறு மேல் வரம்பு (least upper bound) x^*_0 இருக்கிறது. x^*_0 என்னும் மதிப்பை x_0 ஏற்குமாறு x_1, x_2, x_3 என்பவற்றிற்கு செய்தக்க மதிப்புகள் (குறையல்லா மதிப்புகள்) இருந்தால் அவை பிரச்சினை (அ)-ன் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வைக் கொடுக்கின்றன. இதுவே இருமைத் தேற்றத்தின் முதல் பகுதியாகும். எனவே

பிரச்சினை (அ) அல்லது பிரச்சினை (ஆ) இவற்றுள் ஏதாவதொன்றுக்கு வரம்புக்குட்பட்ட இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு இருந்தால், மற்றதும் வரம்புக்குட்பட்ட இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வைப் பெற்றிருக்கும். தவிரவும், $x^*_0 = u^*_0$ என்பது உண்மையாக வேண்டும். (கிளிக்ஸ்மான்)

§ 4.1 பகுதி (ஆ) - ஐப்பின்பற்றி இதை ஆராய்க.

5. போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகள்
(Transportation Problems)

5.1. போக்குவரத்துப் பிரச்சினை—பொது அமைப்பு.

$S_1, S_2, \ldots S_m$ என்னும் m இடங்களில் முறையே $a_1, a_2, \ldots, a_m$ அலகுகள் (units) ஒரு சரக்கு கிடைக்கிறது என்க. இச்சரக்கை $D_1, D_2, \ldots D_n$ என்னும் n இடங்களுக்கு முறையே $b_1, b_2, \ldots, b_n$ அலகுகள் வீதம் சேர்ப்பிக்க வேண்டும். ஒரலகு சரக்கை S_i-இலிருந்து D_j-க்கு அனுப்புவதற்கான செலவு c_{ij} ஆகும். ஒவ்வொரு சோடி (i, j)-க்களுக்கும் c_{ij} கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. போக்குவரத்திற்காக ஆகும் மொத்தச் செலவு மிகக் குறைந்ததாக விருப்பதற்கு S_i-இலிருந்து D_j-க்கு அனுப்ப வேண்டிய சரக்கின் அளவு x_{ij}-க்களைக் காண்பதே பிரச்சினையின் நோக்கமாகும்.

இந்தப் பிரச்சினைக்குக் கணித மாதிரியை ஒரு நேரிய நெறிப் படுத்தும் பிரச்சினையாக அமைக்கிறோம். பிரச்சினையின் எளிமைக்காக, தாற்காலிகமாக, கிடைக்குமிடங்கள் யாவற்றிலும் உள்ள சரக்கின் மொத்த அளவு, அனைத்துச் சேரிடங்களையும் அடைந்த சரக்கின் மொத்த அளவிற்குச்சமம் என்று கொள்வோம். அதாவது,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \text{ என்க.}$$

மேலும் $a_i \geqslant 0$, $b_j \geqslant 0$ என்பது தெளிவு. தவிரவும் S_i-இலிருந்து D_j-க்கு அனுப்பப்படும் சரக்கின் அளவு x_{ij} குறையெண்ணாக இருக்க வாய்ப்பில்லை. ஆகவே, $x_{ij} \geqslant 0$. பிரச்சினைக்குப் பின்வரும் கணித அமைப்பு கிடைக்கிறது :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \tag{5.2}$$

$$x_{ij} > 0 \text{ (மேற்கண்ட அனைத்து } i, j\text{-க்களுக்கும்)} \tag{5.3}$$

என்ற கட்டுப் பாடுகளுக்கு இணங்க

$$x_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{5·4}$$

என்ற (குறிக்கோள்) சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்பைத் தரவல்ல x_{ij}-களைக் காண்க.

சமன்பாடுகள் (5·1), (5·2) — இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று முரண்பாடுடையன வல்ல என்பது

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} b_j = A$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right)$$

என்பதிலிருந்து தெளிவாகிறது.

இந்த அமைப்பில் $m\,n$ மாறிகளில் $(m + n)$ ஒருபடிச் சமன் பாடுகள் உள்ளன. இவற்றைக் கட்டுப்பாடுகளாகக்கொண்ட x_0-க்கு மீச்சிறு தீர்வு காண வேண்டும். அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினை நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாற்றப்பட்டு விட்டது.

அட்டவணை (5·1) போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் பொது அமைப்புக் காட்டப்பட்டுள்ளது. செலவுக் கெழுக்கள் c_{ij}, சரக்கின் அளவுகள் x_{ij} இரண்டும் ஒரே கட்டத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை (5.1)

பொருளின் அளவு / ஓரலகிற்கான செலவு		சேரிடங்கள்						
		D_1	D_2	•	D_j	•	D_n	மொத்தம்
கிடைக்குமிடங்கள்	S_1	x_{11} / c_{11}	x_{12} / c_{12}	• / •	x_{1j} / c_{1j}	• / •	x_{1n} / c_{1n}	a_1
	S_2	x_{21} / c_{21}	x_{22} / c_{22}	• / •	x_{2j} / c_{2j}	• / •	x_{2n} / c_{2n}	a_2
	•	• / •	• / •	• / •	• / •	• / •	• / •	•
	S_i	x_{i1} / c_{i1}	x_{i2} / c_{i2}	• / •	x_{ij} / c_{ij}	• / •	x_{in} / c_{in}	a_i
	•	• / •	• / •	• / •	• / •	• / •	• / •	•
	S_m	x_{m1} / c_{m1}	x_{m2} / c_{m2}	• / •	x_{mj} / c_{mj}	• / •	x_{mn} / c_{mn}	a_m
மொத்தம்		b_1	b_2	•	b_j	•	b_n	A

போக்கு வரத்துப் பிரச்சினை - பொது அமைப்பு

5·2 போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் செய்தக்க தீர்வுகள்-வடமேற்கு மூலை விதி :

இந்தப் பகுதியில் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு முடிவுள்ள மீச்சிறு செய்தக்கத் தீர்வு ஒன்று உண்டு என நிறுவுவது நமது நோக்கமாகும். சில தேற்றங்கள் வழியாக படிப்படியே இந்நோக்கத்தில் வெற்றி பெறுகிறோம்.

தேற்றம் (5.1): போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குச் செய்தக்க தீர்வு ஒன்று உண்டு.

நிறுவல் : எல்லா i, j – க்களுக்கும் $x_{ij} = a_i b_j / A$ எனக் கொள்க. இது செய்தக்க தீர்வுதான் என்பதை எளிதில் சரிபார்க்கலாம்.

$x_{ij} > 0$ என்பது அனைத்து $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$-க்கும் உண்மை என்பது தெளிவு.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i\, b_j}{A} = \frac{a_i}{A} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{A} A = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i\, b_j}{A} = \frac{b_j}{A} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{A} A = b_j$$

எனவே பிரச்சினைக்குச் செய்தக்க தீர்வு உள்ளது.

போக்கு வரத்துப் பிரச்சினை உண்மையிலேயே ஒரு நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைதான் என்பதை இனி விளக்குவோம். எடுத்துக்காட்டாக § 5.1 – ல் விவரிக்கப்பட்ட போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் பொது அமைப்பில் $m=3$, $n=4$ என்று கொள்வோம். [அட்டவணை (5.2)–ஐப் பார்க்கவும்] (5.1), (5.2)-இரண்டும் $mn = 3 \times 4 = 12$ மாறிகளில் $m+n = 3+4 = 7$ சமன்பாடுகளைக் கொடுக்கின்றன. இவற்றை அட்டவணை (5.2)-க்குக் கீழே கொடுத்துள்ளோம். இந்த 7 சமன்பாடுகளும் ஒன்றோடொன்று சாராதவை (mutually independent) அல்ல. கடைசி நான்கு சமன்பாடுகளையும் கூட்டி இரண்டாவது, மூன்றாவது சமன்பாடுகளை அவற்றினின்றும் கழித்தால் முதல் சமன்பாடு கிடைத்துவிடுகிறது.

அட்டவணை (5.2)

பொருளின் அளவு / ஓரலகிற்கான செலவு		சேரிடங்கள்				மொத்தம்
		D_1	D_2	D_3	D_4	
கிடைக்குமிடங்கள்	S_1	x_{11} / c_{11}	x_{12} / c_{12}	x_{13} / c_{13}	x_{14} / c_{14}	a_1
	S_2	x_{21} / c_{21}	x_{22} / c_{22}	x_{23} / c_{23}	x_{24} / c_{24}	a_2
	S_3	x_{31} / c_{31}	x_{32} / c_{32}	x_{33} / c_{33}	x_{34} / c_{34}	a_3
மொத்தம்		b_1	b_2	b_3	b_4	A

அட்டவணை தரும் சமன்பாடுகள் :

$$
\begin{array}{llllll}
\text{(i)} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & & & & =a_1 \\
\text{(ii)} & & +x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & & =a_2 \\
\text{(iii)} & & & +x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & & =a_3 \\
\text{(iv)} & x_{11} & +x_{21} & +x_{31} & & =b_1 \\
\text{(v)} & \quad x_{12} & \quad +x_{22} & \quad +x_{32} & & =b_2 \\
\text{(vi)} & \qquad x_{13} & \qquad +x_{23} & \qquad +x_{33} & & =b_3 \\
\text{(vii)} & \qquad\quad x_{14} & \qquad\quad +x_{24} & \qquad\quad +x_{34} & & =b_4
\end{array}
$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = A = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

எனவே இந்த ஏழு சமன்பாடுகளுள் ஒன்று விடுபடத்தக்கது. முதல் சமன்பாட்டை நீக்கிவிட்டு எஞ்சிய 6 சமன்பாடுகளை இருத்திக் கொள்கிறோம். இவற்றை அணிகளின் குறியீட்டில்

$$AX=P_0$$

என்று எழுதலாம். இங்கு,

$$
A = \begin{pmatrix}
P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \qquad (5.5)
$$

ஒரு 6×12 அணி ;

$$X = (x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}\ x_{31}\ x_{32}\ x_{33}\ x_{34})$$

$$P_0 = (a_2\ a_3\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$$

என்பன நிரல் வெக்டர்கள் ஆகும்.

மேலும்

$$c = (c_{11}\ c_{12}\ c_{13}\ c_{14}\ c_{21}\ c_{22}\ c_{23}\ c_{24}\ c_{31}\ c_{32}\ c_{33}\ c_{34})$$

என்பது நிரை வெக்டர் எனின் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$AX=P_0 \quad ; \quad X>O$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க cX-க்கு மீச்சிறு மதிப்பைத்தர வல்ல தீர்வு X-ஐக் காண்க.

முன் பாடங்களில் எழுதியது போலவே அணி A-ஐ P_{ij} என்னும் நிரல் வெக்டர்கள் மூலம் :

$(P_{11}\ P_{12}\ P_{13}\ P_{14}\ P_{21}\ P_{22}\ P_{23}\ P_{24}\ P_{31}\ P_{32}\ P_{33}\ P_{34})$

என்று எழுதலாம். P_{ij}–ஐ x_{ij}-ன் ஒத்த வெக்டர் என்கிறோம்.

மேலே கூறியவற்றிலிருந்து எந்தப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையையும் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாற்றி தீர்வு காணலாம் என்று தெரிகிறது.

தேற்றம் (5.2) (அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு காணல்): போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு ஓர் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு காண முடியும். அதாவது, m கிடைக்குமிடைங்களும், n சேரிடங்களும் கொண்ட பிரச்சினைக்குச் சரியாக $m+n-1$ மிகை x_{ij}- க்களைக் கொண்ட ஒரு தீர்வு உண்டு.

நிறுவல்; இத்தீர்வு எவ்வாறு காணப்படுகிறது என்பதை ஒரு 3×4 அட்டவணையின் மூலம் விளக்குகிறோம். இந்த முறையைப் பொதுமைப்படுத்தி எந்தப் பரிமாண அணிக்கும் தீர்வு காண முடியும். இந்த முறையை "வடமேற்கு மூலை விதி" (northwest corner rule) என்று கூறுகிறோம்.

அட்டவணை (5.2)-ன் வடமேற்கு மூலையிலுள்ள x_{11} என்ற மூலகத்திலிருந்து தொடங்குகிறோம். x_{11} = மீச்சிறுமம் (a_1, b_1) என்க. மேலும் $a_1 \geqslant b_1$ என்றால் $x_{11}=b_1$ ஆகும். இனி அட்டவணையில் முதல் நிரலிலிருந்து $x_{21}=0=x_{31}$ என்று தெரிகிறது. $a_1 \leqslant b_1$ என்றால் $x_{11}=a_1$ ஆவதால், முதல் நிரையிலிருந்து $x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$ என்று எழுதலாம்.) அதாவது முதல் சேரிடத்திற்குச் செல்ல வேண்டிய b_1 அளவும் முதல் கிடைக்குமிடத்திலிருந்தே பெறப்பட்டுள்ளது; மற்றவிரண்டு கிடைக்குமிடங்களிலிருந்தும் இனி அதற்குச்சரக்குத் தேவை இல்லை. மேலும் முதல் கிடைக்குமிடத்தில் எஞ்சியுள்ள சரக்கு a_1-b_1 ஆகும். முதல் நிரையிலிலுள்ள எல்லா மூலகங்களுக்கும் குறையல்லா மதிப்புகள் காணப்பட்டுவிட்டதால் அந்நிரலை நீக்கிய அட்டவணை (5.3)-ஐ அமைக்கிறோம்.

அட்டவணை (5·3)-ன் வடமேற்கு மூலை மூலகம் x_{12} ஆகும். முன்போலவே x_{12}= மீச்சிறுமம் (a_1-b_1, b_2) என்க. $a_1-b_1 \leqslant b_2$ என்று கொண்டால் $x_{12}=a_1-b_1$ ஆகும். எனவே $x_{13}=x_{14}=0$. அதாவது முதல் கிடைக்குமிடத்தின் எஞ்சிய சரக்குப் பூராவும் இரண்டாம் சேரிடத்திற்கே அனுப்பப்பட்டுவிடுவதால் மூன்றாவது,

அட்டவணை (5.3)

	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	x_{12}	x_{13}	x_{14}	a_1-b_1
S_2	x_{22}	x_{23}	x_{24}	a_2
S_3	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
மொத்தம்	b_2	b_3	b_4	$A-b_1$

→ $a_1 > b_1$

$x_{11} = b_1$

$x_{21} = 0$

$x_{31} = 0$

அட்டவணை (5.4)

	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_2	x_{22}	x_{23}	x_{24}	a_2
S_3	x_{32}	x_{33}	x_{34}	a_3
மொத்தம்	$b_2-(a_1-b_1)$	b_3	b_4	$A-a_1$

$x_{12} = a_1 - b_1$

$x_{13} = 0$

$x_{14} = 0$

↓

$a_1 - b_1 < b_2$

அட்டவணை (5.5)

	D_3	D_4	மொத்தம்
S_2	x_{23}	x_{24}	$a_2-b_2+a_1-b_1$
S_3	x_{33}	x_{34}	a_3
மொத்தம்	b_3	b_4	$A-b_1-b_2$

→ $b_2-(a_1-b_1) < a_2$

$x_{22} = b_2-(a_1-b_1)$

$x_{32} = 0$

அட்டவணை (5.6)

	D_4	மொத்தம்
S_2	x_{24}	$a_2 - b_2 + (a_1 - b_1) - b_3$
S_3	x_{34}	a_3
மொத்தம்	b_4	$A - a_1 - a_2$

$\rightarrow$ $b_3 < a_2 - b_2 + (a_1 - b_1)$

$x_{23} = b_3 \quad x_{24} = a_2 - b_2 + (a_1 - b_1) - b_3$

$x_{33} = 0 \quad x_{34} = a_3$

நான்காவது சேரிடங்களுக்கு இங்கிருந்து சரக்கு அனுப்பமுடியாது. இரண்டாவது சேரிடத்திற்கு வேண்டிய மொத்தசரக்கு b_2-ல் $a_1 - b_1$ முதல் கிடைக்குமிடத்திலிருந்து பெறப்பட்டதால் இரண்டாவது, மூன்றுவது கிடைக்குமிடங்களிலிருந்து அது பெறவேண்டியது $b_2 - (a_1 - b_1)$ ஆகும். முதல் நிரையின் மூலகங்கள் அனைத்தை யும் கண்டுவிட்டதால் அதை நீக்கிவிட்டு அட்டவணை (5.4)-ஐ அமைக்கிறோம்.

இம்மாதிரியே வடமேற்கு மூலை மூலகத்தை ஒவ்வொரு நிலை யிலும் i-வது கிடைக்குமிடத்திலிருந்து அனுப்பப்படவேண்டிய சரக்கின் அளவு அல்லது j-வது சேரிடத்திற்கு வந்துசேரவேண்டிய சரக்கின் அளவு பூச்சியம் என்று ஆகுமாறு இந்த முறையைத் தொடருகிறோம். அட்டவணைகள் (5.5), (5.6) அடுத்துவரும் நிலைகளைக் குறிக்கின்றன. கடைசி அட்டவணையிலிருந்து நேரிடை யாகவே

$$x_{24} = a_1 + a_2 - b_1 - b_2 - b_3$$
$$x_{34} = a_3$$

என்று அறிகிறோம்.

$$x_{24} + x_{34} = a_1 + a_1 + a_3 - b_1 - b_2 - b_3$$
$$= A - (A - b_4) = b_4$$

என்பதையும் சரிபார்த்து அறியலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட 3×4 அணிக்கு (12 மாறிகளில் 6 தம்முள் சாரா சமன்பாடுகளைக் கொண்டது) 6 அடிப்படை மாறிகளின் மிகைமதிப்புத் தீர்வுகளைக் கண்டுவிட்டோம். (இந்தத்தீர்வு

a_i, b_j-க்களில் சில சமனின்மைகளைப் பொறுத்து மாறக்கூடியது என்பது கவனிக்கத்தக்கது.)

வடமேற்கு மூலை விதிப்படி காணப்பட்ட அடிப்படை செய்தக்க தீர்வுகளில் ஒன்று வருமாறு:

$$x_{11} = b_1 \,;\; x_{12} = a_1 - b_1 \,;$$
$$x_{22} = b_2 - (a_1 - b_1) \,;\; x_{23} = b_3;\; x_{24} = b_4 - a_3$$
$$x_{34} = a_3$$

மற்ற ஆறு மாறிகளும் அடிப்படையல்லா மாறிகள். இவற்றின் மதிப்புகள் பூச்சியம் ஆகும். இந்தத்தீர்வைக் காண்பதில் a_i, b_j-க்களின் பின்வரும் சமனின்மைகள் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டன:

$$a_1 > b_1 \,;\; a_1 - b_1 \leqslant b_2 \,;\; a_2 > b_1 + b_2 - a_1 \,;$$
$$b_3 < a_1 + a_2 - b_1 - b_2$$

நாம் பெற்ற தீர்வை அட்டவணை (5.7) - ல் காட்டியவாறு எழுதலாம்:

அட்டவணை (5·7)

		சேரிடங்கள்				
		D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
கிடைக்குமிடங்கள்	S_1	b_1	a_1-b_1	0	0	a_1
	S_2	0	$b_2-a_1+b_1$	b_3	$a_1+a_2-b_1$ $-b_2-b_3$	a_2
	S_3	0	0	0	a_3	a_3
மொத்தம்		b_1	b_2	b_3	b_4	A

போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் செய்தக்க
தீர்வுக்கான அட்டவணை.

சமன்பாடு (5·5) - ன் குறியீட்டில் நாம் பெற்ற தீர்வு $P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$ என்ற ஆறு அடிப்படை வெக்டர்களின் மூலமாக எழுதப்பட்டுள்ளது. இந்த அடிப்படையை B என்ற அணியாகக் குறித்தால்

$$BX = P_0$$

என்பது வடமேற்கு மூலை விதிப்படி பெறப்பட்ட தீர்வு X - ஐக் கொடுக்கிறது இங்கு [அட்டவணை (5.7)–ல் கண்ட x_{ij} - களின் மதிப்புகளுடன்]

$$X = (x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{34})$$

என்ற நிரல் வெக்டரைக் குறிக்கும் வடமேற்கு மூலை விதிப்படி காணப்படும் தீர்வுகள் யாவும் கோடிப்புள்ளித் தீர்வுகள் என்பதை யும் குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்புக்கான இத்தீர்வுகளை மட்டும் ஆராய்வது போதுமானது என்பதையும் கவனிக்க.

முழு எண் அலகுகளிலேயே சரக்குகள் பொதுவாக அனுப்பப் படுவதால், போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளில் a_i, b_j என்பன குறையல்லா முழு எண்கள் ஆகும். அடுத்து வரும் தேற்றம் a_i, b_j - க்கள் முழு எண்கள் என்ற நிலையில் அதன் சிறப்புப் பண்பு ஒன்றை விவரிக்கிறது.

தேற்றம் (5.3) : கிடைக்குமிடங்கள், சேரிடங்கள் ஆகிய வற்றின் சரக்குகளின் மொத்த அளவு முழு எண்களாயின் ஒவ் வொரு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வும் மாறிகளுக்கு முழுவெண் மதிப்புகளையே தரும்.

இத் தேற்றத்தை நிறுவுவதற்குப் பின்வரும் துணைத்தேற்றம் தேவைப்படுகிறது. அதைக்கூறி முன்னர் நிறுவுவோம்.

துணைத்தேற்றம் (5.3 அ): சுருக்கப்பட்ட (reduced) $m \times n$ போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் சமன்பாடுகளின் எந்த $m + n-1$ தம்முள் ஒரு வெக்டர்களையும் படிச்சாரா ஒரு முக்கோண அணி யாக மாற்றி அமைக்கலாம்.

துணைத்தேற்றத்தின் நிறுவல் : முக்கோண அணியின் வரை யறை § **1.1**-ல் தரப்பட்டுள்ளது. இத்தேற்றத்தை நிறுவ அட்டவணை **(5.2)**-ல் தரப்பட்ட 3×4 போக்குவரத்துப் பிரச்சினையை எடுத்துக் கொள்வோம். ($m \times n$ பிரச்சினைக்கும் இதே போன்று நிரூபணம் கொடுக்கலாம்.) B, X என்பன முறையே அடிப்படை வெக்டர்

களின் அணியையும், தீர்வு நிரல் வெக்டரையும் குறித்தால் $BX=P_0$ என்பதை விரிவாக பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\begin{array}{c} \\ \text{அ} \\ \text{ஆ} \\ \text{இ} \\ \text{ஈ} \\ \text{உ} \\ \text{ஊ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{34} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \end{array}$$

இந்த அமைப்பில் B, P_0-களின் நிரைகளை ஒத்தமுறையில் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதினால் புதுவமைப்பில் B-ன் இடத்து உள்ள அணி முக்கோண அணியாக மாற்றப்படுகிறது. இந்த மாறுதல் களில் B-ன் நிரல்கள் மாற்றம் பெருததால் X-ன் மூலகங்களில் வரிசைமாற்றம் ஏதும் செய்யக்கூடாது. [அணிகளின் பெருக்கலுக் கான விதியை (§ 1.1) நினைவிற் கொணர்க.] எனவே,

$$\begin{array}{c} \\ \text{இ} \\ \text{ஈ} \\ \text{அ} \\ \text{உ} \\ \text{ஊ} \\ \text{ஆ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{34} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} X \\ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{34} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

தேற்றம் (5.3)-ன் நிறுவல்: துணைத்தேற்றத்தை நிறுவியது போன்றே நாம் எடுத்துக்கொண்ட 3×4 அணிக்கே நிரூபணம் இங்கு கொடுக்கப்படுகிறது. $m \times n$ அணிக்கு நிரூபணம் இதே போன்று கொடுக்கக்கூடும். துணைத்தேற்றத்தின் நிறுவலின் இறுதி யில் கொடுக்கப்பட்டச் சமன்பாட்டிலிருந்து உடனடியாக

$$x_{11}=b_1, \quad x_{34}=a_3, \; x_{23}=b_3$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. மேலும்

$$x_{24}+x_{34}=b_4, \quad x_{22}+x_{23}+x_{24}=a_2, \quad x_{12}+x_{22}=b_2$$

என்பதிலிருந்து முறையே

$$\begin{aligned} x_{24} &= b_4-a_3 \quad (= a_1+a_2-b_1-b_2-b_3) \\ x_{22} &= a_2-b_3-b_4+a_3 \quad (= b_1+b_2-a_1) \\ x_{12} &= a_1-b_1 \end{aligned}$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. முக்கோண அணியின் மூலகங்கள் 0, 1 என்ற எண்களே என்பதாலும், முக்கோண அணியால்

பெருக்கும்போது கூட்டல், கழித்தல்களே பயன்படுத்தப்படுவதாலும் (மூலகங்களின் பெருக்கல் 0, 1 என்ற எண்களாலேயே நிகழ்கின்றன) மாறிகளின் மதிப்புகள் முழு எண்களாகவே இருக்கும். அவை மிகை எண்கள் என்று முன்னரே நிரூபிக்கப்பட்டது. எனவே தீர்வுகள் யாவும் முழுமிகை எண்களே. தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

தேற்றம் (5·4) : போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு முடிவுள்ள (finite) மீச்சிறு தீர்வு எப்பொழுதும் இருக்கிறது.

நிறுவல் : தேற்றம் (5.1) - ன்படி பிரச்சினைக்கு செய்தக்க தீர்வுகள் உண்டு. சமன்பாடுகள் (5.1), (5.2)-களில் கெழுக்கள் யாவும் குறையல்லா எண்கள். எல்லா a_i, b_j-க்களும் குறையல்லா எண்கள் எனவும் அவை முடிவிலி அல்ல எனவும் தெரியுமாதலால் எந்த x_{ij}-ஐயும் விருப்பப்படி (arbirtrarily) பெரிய எண்ணுகைக்காண முடியாது. குறிப்பாக, எந்த x_{ij}- ம்அது இருக்கும் நிரையின் கூடுதல் a_i அல்லது நிரலின் கூடுதல் b_j-ஐ விடப் பெரியது அல்ல. அடிப்படைத் தீர்வு எதிலும் $x_{ij}=a_i$ அல்லது b_j என்று தான் இருக்கக் கூடும் என்பதனையும் கவனிக்க. எனவே பிரச்சினைக்கு முடிவுள்ள மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு இருந்தே தீரும்.

குறிப்பு : தேற்றம் (5·3), (5·4)-களிலிருந்து a_i, b_j-க்கள் முழு எண்கள் ஆயின் அடிப்படை மீச்சிறு தீர்வும் முடிவுள்ள முழு எண்களால் ஆனதே என்று அறியலாம்.

இந்தப் பகுதியில் கண்ட தேற்றங்களிலிருந்து $m \times n$ போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் தீர்வுகாண அதை mn மாறிகளில் $m+n-1$ ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாற்றி அமைக்கலாம் என்று தெரிகிறது. இந்த மாற்றப்பட்ட பிரச்சினைக்கான தீர்வை வழக்கமான சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி கணக்கிடலாம். ஆனல் m, n- களின் சிறு மதிப்புகளுக்கும் கூட சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையும், மாறிகளின் எண்ணிக்கையும் எளிதில் சமாளிக்க முடியாத அளவிற்குப் பெருகிவிடுகின்றன. எனவே, சிம்ப்ளக்ஸ் கணக்கீட்டு முறையையே போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் தனித் தன்மைக்கேற்ப ஓரளவு மாற்றிப் பயன் படுத்துகிறோம். கம்ப்யூட்டர்களைப் பயன்படுத்தும்போது போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்காகத் திருத்தி எழுதிய புரோகிராம்கள் பல சமன்பாடுகளை ஒரே சமயத்தில் சமாளிக்க உதவியாக உள்ளன. இம்மாதிரியுள்ள பிரத்யேக முறைகளுள் படிக்கட்டு முறையும் (stepping stone method) ஒன்றாகும். இது பின்னர் விவரிக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக **C. E. I. R. LP/90/94** அமைப்பில் குறிக்கோள் சார்பு உள்பட சமன்பாடுகள் அல்லது சமனின்மைகள் **1125** நிரைகளுக்கு மேற்படாமல் இருந்தால் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணமுடியும். எனவே, இந்தச் சங்கேத மொழியை போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் கிடைக்குமிடங்கள், சேரிடங்கள் ஆகியவற்றின் மொத்த எண்ணிக்கை **1125**–க்கு மேற்படாது இருக்கும் வரையில் தான் பயன்படுத்தலாம். ஆனால் **TS/90** என்ற போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கான சிறப்புச் சங்கேத மொழியைக் கொண்டு இந்த எண்ணிக்கை **6000** வரை இருந்தால் கூடத் தீர்வு காணமுடியும். இதிலிருந்து போக்குவரத்துப் பிரச்சினையின் தீர்வு காண தனிமுறையின் தேவையும், பயனும் ஒருவாறு தெளிவாகலாம். § **5·5**-ல் இவற்றுல் சில கணக்கீடு முறைப்பற்றி விவரங்கள் தரப்படுகின்றன.

5·3 கேடுறு நிலை - $\in$ உலைவு முறை :

$m \times n$ போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண முதலில் $m + n - 1$ குறையல்லா மாறிகள் x_{ij}-களையும் அவற்றுடன் தொடர்பு கொண்ட $m + n - 1$ தம்முள் ஒரு படிச்சாரா வெக்டர்களையும் அறியவேண்டும் ஓர் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வின் மாறிகளோடு தொடர்பு கொண்ட வெக்டர்கள் தம்முள் ஒருபடிச் சாராதவை என நாம் அறிவோம். அடிப்படைத் தீர்வு கேடுருதது எனின் இத்தேவை நிரைவு செய்யப்படுகிறது. அதாவது, நாம் ஒரு கோடிப்புள்ளித் தீர்வைப் பெறுகிரேம். பின்னர் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தி மீச்சிறு தீர்வைக்கண்டு பிடிக்கலாம். ஆனுல் அடிப்படைத் தீர்வு கேடுற்றதாயின் $k < m + n - 1$ மிகை மாறிகளே தீர்வில் இருக்கும். எஞ்சிய எல்லா மாறிகளும் பூச்சியம் ஆகும். இந்த k மாறிகளோடு பூச்சியம் மதிப்புப் பெற்ற எஞ்சிய மாறிகளிலிருந்து $m + n - 1 - k$ மாறிகளைப் பொறுக்கித் தம்முள் ஒருபடிச் சாரா $m + n - 1$ வெக்டர்களைக் காணவேண்டும். எந்த $m + n - 1 - k$ மாறிகளைப் பொறுக்க வேண்டும். என்பதைத் தீர்மானிக்கப் பின்வரும் $\in$ - உலைவு ($\in$- peturbation) முறையைப் பயன்படுத்துகிரும்.

அட்டவணை (**5.2**)-ல் கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினையை எடுத்துக் கொள்வோம். $a_1 \geqslant b_1$ எனக்கொண்டு, வடமேற்கு மூலைவிதிப்படி $x_{11} = b_1$ எனக்கண்டோம். பின்னர் $a_1 - b_1 < b_2$ எனக் கொண்டு, $x_{12} = a_1 - b_1$ என எழுதினேம். இந்நிலையில் $x_{13} = x_{14} = 0$ எனக் கிடைத்தது. [அட்டவணைகள் (**5.3**), (**5.4**) பார்க்கவும்] அடுத்து, $a_2 = b_2 - (a_1 - b_1)$ என்றே இருந்தால்

[அட்டவணை (5.5)-ஐப் பார்க்கவும்] $x_{22} = a_2$ என்றாகும். எனவே $x_{23} = x_{24} = 0$ ஆகின்றன. இப்பொழுது அடிப்படைத் தீர்வில் உள்ள மிகை மாறிகளின் எண்ணிக்கை $m + n - 1 = 6$-ஐ விடக் குறைகிறது. அதாவது, ஏதாவதொரு x_{ij}-ன் மதிப்பு காணும் போது அது பெறத்தக்க வாய்ப்புள்ள இரு மதிப்புகளும் சமமாகி விடுகின்றன. எனவே நிரை i-ன் n மூலகங்களின் கூடுதல் a_i-க்குச் சமமாவதற்குப் பதில் அந்நிரையின் ஒருசில மூலகங்களின் பகுதிக் கூடுதலே (partial sum) a_i ஆகிவிடுகிறது; அல்லது, நிரல் j-ன் m மூலகங்களின் கூடுதல் b_j - க்குச் சமமாவதற்குப் பதில் அந்நிரல் மூலகங்கள் ஒரு சிலவற்றின் பகுதிக் கூடுதலே b_j ஆகி விடுகிறது.

இம்மாதிரி கேடுறுத் தீர்வுகள் கிடைக்கும்போது நிலையைச் சமாளிக்க பின்வரும் முறையைக் கையாண்டு a_i, b_j-க்கள் தத்தம் நிரை அல்லது நிரலின் மூலகங்களின் பகுதிக் கூடுதலுக்குச் சமமாகாதவாறு பார்த்துக் கொள்கிறோம்.

$\in > 0$ என்ற ஏதாவதொரு மிகை எண்ணுக்கு

$$\left.\begin{aligned} \overline{a_i} &= a_i + \in &&, i = 1, 2, \ldots, m \\ \overline{b_j} &= b_j &&, j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \overline{b_n} &= b_n + m\in, && \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

எனக் கொண்டு ஒரு புதிய கணக்கை அமைக்கின்றோம். இக் கணக்கின் தீர்வில் $\in = 0$ என ஈடு செய்து தேவையான தீர்வைப் பெறுகிறோம். இதை ஒரு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விவரிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு : அட்டவணை (5.8)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு காண்க.

தீர்வு : வடமேற்கு மூலை விதிப்படி நாம்பெறும் தீர்வில் [அட்டவணை (5.9)] அது கேடுறுதது எனின் 6 மிகை மூலகங்கள் இருக்கவேண்டும். ஆனால் அட்டவணை (5.9)-லிருந்து 5 மூலகங்களே மிகையானவை என்று அறிகிறோம். இதற்குக் காரணம் மேலே கண்ட குறியீட்டில்

$$\sum_i x_{i3} = x_{23} = b_3 = 3$$

$$\text{அல்லது } \sum_i x_{i4} = x_{34} = b_4 = 2$$

அல்லது $$\sum_j x_{3j} = x_{34} = a_3 = 2$$

என்றிருப்பதேயாகும். 5 மிகை மூலகங்களைத் தவிர எஞ்சிய பூச்சியம் மதிப்புபெற்ற மூலகங்களுள் எந்த மூலகத்தைச் சேர்த்து தம்முள் ஒருபடிச் சாரா 6 வெக்டர்களைக் காண்பது என்பதே நமது பிரச்சினையாகும். இதுவே ∈-உலைவு முறையின் நோக்கமுமாகும். (5.6)-ல் கூறியபடி a_i, b_j-க்களை மாற்றி அட்டவணை (5.10)-ஐ அமைக்கிறோம். இந்த அட்டவணையின் பிரச்சினையை வடமேற்கு மூலை விதிப்படி தீர்த்து, அதனை அட்டவணை (5.11)-ல் குறித்திருக்கிறோம். கடைசி அட்டவணையிலிருந்து x_{24} அடிப்படைத்தீர்வில் இருக்கவேண்டும் எனத் தெரிகிறது. x_{24} அல்லது x_{33} இவற்றுள் ஒன்று அடிப்படைத் தீர்வில் இருந்திருக்கலாம். ஆனால் அது அவற்றுள் எது என்பதை ∈-உலைவு முறை காண உதவுகிறது.

அட்டவணை (5.8)

	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	3
S_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	4
S_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	2
மொத்தம்	1	3	3	2	9

அட்டவணை (5.9)

	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	1	2	0	0	3
S_2	0	1	3	0	4
S_3	0	0	0	2	2
மொத்தம்	1	3	3	2	9

அட்டவணை (5.10)

	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$3+\varepsilon$
S_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$4+\varepsilon$
S_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	$2+\varepsilon$
மொத்தம்	1	3	3	$2+3\varepsilon$	$9+3\varepsilon$

அட்டவணை (5.11)

	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	1	$2+\varepsilon$	0	0	$3+\varepsilon$
S_2	0	$1-\varepsilon$	3	2ε	$4+\varepsilon$
S_3	0	0	0	$2+\varepsilon$	$2+\varepsilon$
மொத்தம்	1	3	3	$2+3\varepsilon$	$9+3\varepsilon$

5·4 போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளை அமைத்தல் :

போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளை அமைக்கும் முறைகளும், அவற்றை அமைக்கும் போது கவனத்தில் கொள்ள வேண்டிய சில குறிப்புகளும் இந்தப்பகுதியில் தொகுத்துத் தரப்படுகின்றன.

எல்லா கிடைக்குமிடங்களிலிருந்தும் சரக்கை எல்லாச் சேரிடங்களுக்கும் அனுப்புவது என்பது இயலாத காரியமாகவோ அல்லது இலாப நோக்கில் ஒவ்வாததாகவோ இருக்கலாம். இம்மாதிரி உள்ள மார்க்கங்களில் சரக்கு போக்குவரத்திற்கான செலவு மிகவும் அதிகம் என்று கொள்கிறோம். இந்த வழிகளைக் குறிப்பிடப்படாத மார்க்கங்கள் (unspecified routes) எனக் கூறுகிறோம்.

சென்ற பகுதிகளில் $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ என்று எடுத்துக்கொண்டோம். ஆனால், பொதுவாக, நடைமுறைப் பிரச்சினைகளில் இந்தக் கட்டுப்பாடு நிறைவு செய்யப்பட்டிருக்கும் எனக் கூறமுடியாது; அதாவது, கிடைக்குமிடங்களில் சரக்கின் மொத்த அளவு

சேரிடங்களுக்குத் தேவையான சரக்கின் மொத்த அளவைவிடக் கூடுதலாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருக்கலாம். கூடுதலாக இருப்பின் போலிச் சேரிடம் (dummy destination) ஒன்றை அதிகப்படியாகக் கிடைக்கும் சரக்கைப் பெற்றுக் கொள்வதற்காக வரையறுக்கின்றோம். இதே போன்று தேவைக்குக் குறைவாக இருப்பின் போலிக் கிடைக்குமிடம் (dummy source) ஒன்றை வரையறை செய்து கொள்கிறோம். போலிச் சேரிடத்திற்கு அனுப்பப்படும் சரக்கு தேவைக்கு மேல் உபரியாக கிடைப்பதாகும். இது பயனற்ற சரக்கு. இதன் போக்குவரத்துச் செலவு பூச்சியம் எனக் கொள்ளப்படும். இவ்வாறே போலிக் கிடைக்குமிடத்தின் சரக்கு சேரிடத்திற்கு அனுப்ப ஆகும் செலவு இச்சரக்கை அனுப்பத் தவறுவதால் ஏற்படும் நஷ்டம் அல்லது அபராதத் தொகைக்குச் சமம் எனக் கொள்ளப்படவேண்டும்.

கிடைக்குமிடத்தோடு தொடர்பு கொண்ட உற்பத்திச் செலவுகளும், ஊர்திகளில் ஏற்றி இறக்க ஆகும் செலவுகளும் பிரச்சினையை அமைக்கும்போது மனதிற் கொள்ளப்பட வேண்டும். கிடைக்குமிடத்திலிருந்து அனுப்பப்படும் சரக்கின் மொத்த அளவு மாறிலியானால் உற்பத்தி முதலானவைகளுக்கான செலவுகளும் மாறாமல் இருக்கும். எனவே மீச்சிறு அல்லது மீப்பெரு தீர்வுகளை இவை பாதிக்காது. ஆனால், இச்செலவுகள் காலம்,இடம் இவற்றைப் பொறுத்து மாறக்கூடியவை என்றால் இவற்றைப் போக்குவரத்துக்கான செலவுகளுடன் ஒவ்வொரு சேரிடத்திற்கும் (போலிச் சேரிடத்தைத்தவிர) கூட்டிக் கொள்ளவேண்டும். உற்பத்திச்செலவுகள் சில சரக்குகளுக்குப்பருவத்திற்குப்பருவம் மாறலாம். அதேபோன்று பேருந்துகளுக்கான செலவுகளும், இரயில் கட்டணங்களும், தினக் கூலிகளுக்கு வழங்கப்படும் ஊதியங்களும் எல்லா இடங்களிலும், எல்லா நேரங்களிலும் ஒரே சீராக இருப்பதில்லை.

உற்பத்தியாகும் இடத்தில் கூடுதல் செலவில் உபரிச்சரக்கு (surplus Commodity) கிடைக்குமானல், இந்த உபரிச்சரக்கு வேறொரு தனியிடத்திலிருந்து வருவதாகக் கொள்ளப்படல் வேண்டும். சிறிதும், பெரிதுமான சுமைகளாகச் சரக்கை அனுப்பும்போது அவற்றிற்கான செலவுகள் மாறக்கூடும். இந்த நிலையில் ஒரே சேரிடத்திற்குச் செல்லும் வெவ்வேறு ரகச் சுமைகளையும் அவை ரகவாரியாக வெவ்வேறு சேரிடங்களுக்குச் செல்வதாகக் கொள்கிறோம்.

சில பிரச்சினைகளில் இடைநிலை (intermediate) சேரிடங்களை பயன்படுத்த வேண்டிய தேவை ஏற்படலாம். இவை டிப்போக்கள், கிடங்குகள், மண்டிகள் போன்றவையாம். உற்பத்தியாகும் இடத்திலிருந்து சரக்கு டிப்போ அல்லது கிடங்கிற்கு வந்து

பின்னர் வெவ்வேறு சேரிடங்களுக்கு அனுப்பப்படலாம். இம்மாதிரி சந்தர்ப்பங்களில் கிடங்குகள் அல்லது டிப்போக்கள்ஒரே சமயத்தில் கிடைக்குமிடமாகவும், சேரிடமாகவும் கருதப்பட வேண்டும். டிப்போ அல்லது கிடங்கின் கொள்ளளவு அது கிடைக்குமிடமாகக் கருதப்படும்போது பெற்றிருக்கும் சரக்கின் மொத்த அளவிற்கும், சேரிடமாகக் கருதப்படும்போது அது பெறும் சரக்கின் மொத்த அளவிற்கும் தனித்தனியே சமமாகும். மேலும், டிப்போவின் தேவை அந்த டிப்போவின் இருப்பினாலேயே நிறைவு செய்யப்படும்போது அதற்கான செலவு பூச்சியம் என்று கொள்ளப் படும். டிப்போவின் கொள்ளளவு வரம்புக்குட்படாமலிருப்பின் அதை மிகப்பெரிய எண் ஒன்றால் விருப்பப்படி குறித்துக் கொள் கிறோம்.

பல்வேறு பருவகால இடைவெளிகளின் தேவைக் கேற்ப அமைக்கப்படும் பிரச்சினைகளில் ஒவ்வொரு பருவத்தையும் ஒவ்வொரு கிடைக்குமிடத்தைப் பொறுத்தும் தனித்தனி கிடைக்கு மிடங்களாகக் கருதவேண்டும். இதேபோன்று சேரிடங்களையும் ஒவ்வொரு பருவத்திற்கும் தனியாகக் கருதவேண்டும். கிடங்கின் கொள்ளளவு மிக அதிகம் எனின் கிடங்குச் செலவுகளை (ஏதாவ தொரு கால இடைவெளியிலிருந்து அடுத்த கால இடைவெளி வரை சரக்கைப் பாதுகாப்பதற்கான செலவுகளை) மற்றச் செலவு களுடன் கூட்டி மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடவேண்டும். ஆனால் கிடங்கின் கொள்ளளவு அளவிற்குட்பட்டது (limited) என்றால் இந்த அளவை ஒரு உபரிக் கிடைக்குமிடமாகவும் அதே சமயம் அதே அளவுகொண்ட சேரிடமாகவும் கருதுகிறோம். இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டால் விளக்குகிறோம்.

மூன்று அடுத்தடுத்தக் காலப் பிரிவுகளில் ஒரு பொருளின் தேவைகள் முறையே 18, 9, 16 அலகுகள். காலப் பிரிவிற்கு ஏற்றவாறு உற்பத்திச் செலவுகள் மாறுதல் அடைகின்றன. [இந்த மாறுதல் கச்சாப் பொருளின் (raw material) உற்பத்திக்கு ஏற்றவாறு அல்லது கால நிலைக்கு ஏற்றவாறு இருக்கலாம்!] இவை முறையே ஓரலகுக்கு 6, 4, 8 ஆயிரம் ரூபாய்கள் என்போம். ஒவ்வொரு காலப் பிரிவிலும் குறைந்தது 15 அலகுகளாவது உற்பத்தி செய்ய வேண்டும். இன்னும் 5 அலகுகள் வரை அதிக நேர வேலையால் (over time) ஓரலகுக்கு 3 ஆயிரம் ரூபாய் செலவில் உற்பத்திச் செய்யலாம். அதிக பட்சம் 5 அலகுகள் வரை கிடங்கில் ஒருகாலப் பிரிவிலிருந்து அடுத்தக் காலப் பிரிவு வரை ஓரலகுக்கு 1 ஆயிரம் ரூபாய் செலவில் தேக்கி வைக்கலாம். ஆனால் கிடங்கில் சரக்கை உள்ளடக்கிப் பின்னர் வெளியேற்ற ஆகும் செலவு ஓரலகு 2 ஆயிரம் ரூபாய்.

இந்த விவரங்களை அட்டவணை (5.12) -ல் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையாக அமைத்துத் தந்திருக்கிறோம். இந்த அட்டவணை யில் 8 கிடைக்குமிடங்களும், 6 சேரிடங்களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. S_i ($i = 1, 2, 3$) என்பன i-ஆவது கால ஒழுங்கு (regular) வேலை நேர உற்பத்தியைக் குறிக்கின்றன. O_i ($i = 1, 2, 3$) அதிக நேர (over time) வேலை உற்பத்தியைக் குறிப்பதாகவும், G_i ($i = 1, 2$) i-வது காலப் பிரிவு பிரிவிலிருந்து ($i+1$) – வது காலப்பிரிவு வரை கிடங்கில் தேக்கி வைக்கப்படும் அளவைக் குறிப்பதாகவும் கொள் கிறோம். இவ்வாறு 8 கிடைக்குமிடங்கள் பிரச்சினையில் அமை கின்றன. இதே போன்று D_i–ஐ($i = 1, 2, 3$) i-வது காலப்பிரிவின் தேவையாகவும், G_i-ஐ ($i = 1, 2$) i–வது(காலப்பிரிவிலிருந்து ($i+1$)-வது காலப்பிரிவு வரை தேக்கி வைக்கப்படும் அளவாகவும்கொண்டு 5 சேரிடங்களையும், தேவைக்கு மேற்பட்ட உபரி உற்பத்திச் சரக் கைப் பெற்றுக்கொள்வதற்காக போலிச்சேரிடம் ஒன்றையும் — மொத்தம் 6 சேரிடங்களை — வரையறுத்துள்ளோம். அட்டவணை யின் வெற்றிடங்கள் குறிப்பிடப்படாத மார்க்கங்கள் ஆகும். இவற் றிற்கான போக்குவரத்துச் செலவுகள் முடிவிலி எனக்கொள்ளல் வேண்டும்.

அட்டவணையில் போக்குவரத்துச் செலவுகள் ஆயிரம் ருபாய் களிலும், தேவைகளும், கிடைக்கும் அளவுகளும் கொடுக்கப்பட்ட அலகுகளிலும் உள்ளன.

அட்டவணை (5.12)

கிடைக்குமிடங்கள்	கிடைக்கும் அளவுகள்	சேரிடங்கள்	D_1	G_1	D_2	G_2	D_3	போலி
		தேவைகள்	18	5	9	5	16	17
S_1	15	செலவுகள் →	6	8				
O_1	5		9	11				0
G_1	5			0	1	1		
S_2	15				4	6		
O_2	5				7	9		0
G_2	5					0	1	
S_3	15						8	
O_3	5						11	0

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை ஒன்றுக்கான அணி போக்குவரத்துப் பிரச்சினையைக் குறிக்குமா, குறிக்காதா என்று காண எளிய சோதனை ஒன்று உண்டு : குறிக்கோள் சார்பிலும் வலது புறத்திலும் இல்லாத ஒவ்வொரு கெழுவும் ± 1 என இருந்து, ஒவ்வொரு மாறியும் அனைத்துக் கட்டுப்பாடுகளையும் ஒன்றுசேர நோக்கும்போது ஒரு + 1-ஐயும் ஒரு — 1-ஐயும் பெற்றும் இருக்குமாறு பிரச்சினையை அமைக்க முடிந்தால், அந்தப் பிரச்சினை ஒரு போக்குவரத்துப் பிரச்சினையாகும். போக்குவரத்துப் பிரச்சினை ஒன்றை வரையறுக்கும் சமன்பாடுகள் இந்தச் சோதனையை நேரிடையாகவே பொதுவாக நிறைவு செய்வதில்லை. ஆனால் கிடைக்குமிடங்களுக்கான சமன்பாடுகளை —1–ஆல் பெருக்கி இந்தச்சரியான உருவிற்கு அவற்றைக் கொணர்தல் முடியும்.

போக்குவரத்துப் பிரச்சினையாக மாற்றியமைத்துச் சோதனைக்கு உட்படுத்தச் சமனின்மைக் கட்டுப்பாடுகளை முதலில் தொய்வு மாறிகளைக் கூட்டி அல்லது கழித்துச் சமன்பாடுகளாக மாற்றுகிறோம். பின்னர், மற்ற எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் கூட்டி அவற்றின் குறிகளை மாற்றி ஒரு சமநிறைப்படுத்தும் (balancing) சமன்பாட்டை எழுதுதல் வேண்டும். ஒவ்வொரு மாறியும் இப்பொழுது சரியாக ஒரேவொரு + 1 - ஐயும் ஒரேவொரு — 1-ஐயும் பெற்றிருக்கும். குறைக் கெழுக்களை மட்டும் பெற்ற சமன்பாடுகள் கிடைக்குமிடங்களையும் வலதுபுறத்தின் குறை மதிப்புகள் கிடைக்கும் அளவுகளையும் குறிக்கின்றன. மிகைக் கெழுக்களை மட்டும் கொண்ட சமன்பாடுகள் சேரிடங்களையும், வலது புறங்கள் தேவையானஅளவுகளையும் குறிக்கின்றன. மிகையும், குறையுமான கெழுக்களை கொண்ட சமன்பாடுகள் கிடைக்குமிடங்களையும், சேரிடங்களையும்குறிக்கின்றன. கிடைக்குமிடத்தின் கிடைக்குமளவு மிக அதிகமாக இருக்க வேண்டும். இதைவிட வலதுபுறத்தின் அளவிற்குச் சேரிடத்தின் தேவை அதிகமாயிருக்க வேண்டும். ஒத்த சேரிடத்திற்கு கிடைக்குமிடத்திலிருந்து ஆகும் போக்குவரத்துச் செலவு பூச்சியம் ஆக வேண்டும். இப்பொழுது மாறிகள் குறைக் கெழு பெற்ற கிடைக்குமிடத்திலிருந்து மிகைக்கெழு பெற்ற சேரிடத்திற்குக் குறிக்கோள் சார்பின் கெழு புலப்படுத்தும் செலவில் அனுமதிக்கப்பட்ட மார்க்கங்களைக் குறிக்கின்றன.

இம்மாதிரி முறைகளால் நடைமுறையில் போக்குவரத்துடன் எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லாத நிலைமைகளின் மாதிரிகள் கூட போக்கு வரத்துப் பிரச்சினைகளாக மாறிவிடக்கூடும். துரதிர்ஷ்டவசமாக செய்முறையில் வேறு சில காரணங்களால் அவற்றைப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளாக மாற்றுவதில் இடையூறுகள் ஏற்படுகின்றன. எனவே, எல்லாப் பிரச்சினைகளும் போக்குவரத்

துப் பிரச்சினைகளாக மாற்றி யமைக்கப்படுவதில்லை. இருப்பினும் அவற்றைப் பற்றித் தனியாக ஆராய்வதும், அவற்றிற்கு ஏற்றவாறு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையை எவ்வாறு மாற்றலாம் என்பதை அறிந்து கொள்வதும் மிகவும் பயனுள்ளவையாக இருக்கும்.

5.5 முதனிலை செய்தக்க தீர்வு காணும் முறைகள் :

வடமேற்கு மூலை விதியின்படி முதனிலை செய்தக்க தீர்வு காணும் முறை § **5-3**-ல் விவரிக்கப்பட்டது. இந்த முறையில் செலவுகள் அணியைப் பயன்படுத்தாமலே செய்தக்க தீர்வு காணப் பட்டது. இந்தப்பகுதியில் செலவுகள் அணியைப் பயன்படுத்தி முதனிலை செய்தக்க தீர்வுகள் காணும் ஒரு சில முறைகள் விவரிக்கப்படுகின்றன.

(அ) திருத்தப்பட்ட வடமேற்கு மூலை விதிமுறை :

இது வடமேற்கு மூலை விதியைப் பயன்படுத்தும் முறையைப் போன்றதே. ஆனால் செலவுகள் அணியையும் பயன்படுத்துகிறோம். இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குகிறோம். அட்டவணை (**5.13**)-ல் கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்கு முதனிலை செய்தக்க தீர்வு காண்போம்.

முதல் இருப்பிடம் S_1 - ல் **6** அலகுகள் உள்ளன. முதல் சேரிடம் D_1-க்குத் தேவையான **4** அலகுகளைக் கொடுப்போம். எஞ்சிய **2** அலகுகளை S_1 - லிருந்து குறைந்த போக்குவரத்துச் செலவு பெற்ற D_2-க்கு அனுப்புகிறோம். S_1-லிருந்து இனி மற்றச் சேரிடங்களுக்கு சரக்கு ஏதும் அனுப்ப இயலாது. எனவே $x_{11} = 4$; $x_{12} = 2$; $x_{13} = x_{14} = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. மேலும் D_1 - க்கு சேரவேண்டிய **4** அலகுகளும் S_1–லிருந்தே கிடைத்து விட்டதால் S_2, S_3-க்களிலிருந்து D_1 பெறும் சரக்கு பூச்சியம் ஆக வேண்டும். எனவே $x_{21} = x_{31} = 0$. அடுத்து இரண்டாவது கிடைக்குமிடம் S_2- ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். D_1 -க்கு ஏதும் இங் கிருந்து தேவை இல்லை என்பதால் D_2-க்கு இன்னமும் தேவை யான **4** அலகுகளை அனுப்புகிறோம். எஞ்சிய **4** அலகுகளை S_2 – விருந்து குறைந்த செலவுக்கெழு பெற்ற (பூச்சியம்) D_4- க்கு அனுப்புகிறோம். எனவே $x_{22} = 4$; $x_{23} = 0$; $x_{24} = 4$ எனக் கிடைக்கின்றன. மேலும் D_2–க்கு தேவையானமொத்தம் **6** அலகுச் சரக்கும் S_1, S_2 – க்களிலிருந்தே அனுப்பப்பட்டு விட்டதால் அது S_3-இலிருந்து ஏதும் பெற வாய்ப்பில்லை. ஆகவே $x_{32} = 0$. இனி S_3-ன் **10** அலகுகளிலிருந்து D_3-க்கு **8** அனுப்பிவிட்டு எஞ்சியவற்றை D_4-ன் தேவைப் பூர்த்திக்கு அனுப்புகிறோம். அதாவது $x_{33} = 8$; $x_{34} = 2$ எனக் காண்கிறோம். இந்தத் தீர்வை அட்டவணை (**5.15**)-ல் கொடுத்துள்ளோம். நாம் முன்னரே பார்த்த வடமேற்கு மூலை விதிப்

படி காணப்படுகின்ற தீர்வும் அட்டவணை (5.14)-ல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. இரண்டையும் ஒப்பு நோக்குக.

இந்த முறைப்படி நாம் பெற்ற தீர்வு 5 மிகை மூலகங்களையே பெற்றிருப்பதால் இது கேடுறு தீர்வு ஆகும். அட்டவணைகளின் கீழேயே தீர்வுக்கான போக்குவரத்துச் செலவும் கொடுக்கப்பட் டுள்ளன. இச்செலவு அட்டவணை (5.15) - க்கு அட்டவணை (5.14)-க்கு இருந்ததை விடக்குறைவு என்பதும் நோக்கத்தக்கது. அதாவது, பொதுவாக திருத்தப்பட்ட வடமேற்கு மூலைவிதி மீச்சிறு தீர்விற்கு அண்மையில் நம்மை இட்டுச் செல்கிறது.

(ஆ) அணி மீச்சிறும முறை : (Method of matrix minima)

செலவுக் கெழுக்கள் அணியை ஆராய்ந்து மிகக் குறைந்த செலவு எண் பெற்ற கட்டத்தில் முதலில் கவனம் செலுத்து கிறோம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கட்டங்கள் இம்மாதிரி இருக்கு மானால் அவற்றுள் ஏதாவதொன்றை நம் விருப்பப்படி எடுத்துக் கொள்கிறோம். அது (i, j) கட்டம் என்றால் a_i, b_j-க்களுள் சிறியதை x_{ij} என எழுதுகிறோம். $a_i < b_j$ என்றால் i- வது நிரையின் ஏனைய மூலகங்கள் பூச்சியமாகும். $b_j < a_i$ என்றால் j-வது நிரலின் ஏனைய மூலகங்கள் பூச்சியமாகும். இந்த நிரை அல்லது நிரலை நீக்கிவிட்டு முன்மாதிரியே திரும்பத்திரும்ப சுருக்கப்பட்ட அணியை இம்முறைக்கு உட்படுத்தவேண்டும். இறுதியில் நாம் செய்தக்கதீர்வு ஒன்றைப் பெறுகிறோம். அட்டவணை (5-13)-ல் எடுத்துக்கொண்ட பிரச்சினைக்கு இம்முறைப்படி கண்ட தீர்வு அட்டவணை (5.16)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தீர்விற்கான செலவும் அதன் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை (5·13)

சேரிடம் / கிடைக்கு -மிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	x_{11} / 1	x_{12} / 2	x_{13} / 3	x_{14} / 4	6
S_2	x_{21} / 4	x_{22} / 3	x_{23} / 2	x_{24} / 0	8
S_3	x_{31} / 0	x_{32} / 2	x_{33} / 2	x_{34} / 1	10
மொத்தம்	4	6	8	6	24

அட்டவணை (5·14)

சேரிடம் / கிடைக்குமிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	4 / 1	2 / 2	0 / 3	0 / 4	6
S_2	0 / 4	4 / 3	4 / 2	0 / 0	8
S_3	0 / 0	0 / 2	4 / 2	6 / 1	10
மொத்தம்	4	6	8	6	24

போக்கு வரத்துச் செலவு $= 42$

அட்டவணை (5·15) முறை (அ)

சேரிடம் / கிடைக்குமிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	4 / 1	2 / 2	0 / 3	0 / 4	6
S_2	0 / 4	4 / 3	0 / 2	4 / 0	8
S_3	0 / 0	0 / 2	8 / 2	2 / 1	10
மொத்தம்	4	6	8	6	24

போக்கு வரத்துச் செலவு $= 38$

அட்டவணை (5·16) முறை (ஆ)

சேருமிடம் / கிடைக்குமிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்
S_1	0 / 1	6 / 2	0 / 3	0 / 4	6
S_2	0 / 4	0 / 3	2 / 2	6 / 0	8
S_3	4 / 0	0 / 2	6 / 2	0 / 1	10
மொத்தம்	4	6	8	6	24

போக்கு வரத்துச் செலவு = 28

(இ) ஓரலகு அபராத முறை (Unit Penalty Method) :

செலவுக்கெழு அணியோடு ஒரு நிரையையும், நிரலையும் பின் வருமாறு சேர்த்து எழுதிக்கொள்கிறோம். ஒவ்வொரு நிரலினுடையவும் மீச்சிறு மூலகத்திற்கும் அதையடுத்த பெரிய மூலகத்திற்கும் உள்ள வேறுபாட்டை அந்நிரலின் கீழே குறிக்கவும். இதே போன்று ஒவ்வொரு நிரையின் இறுதியிலும் அந்நிரையின் கடைசி இரண்டு சிறிய மூலகங்களின் வேறுபாட்டைக் குறிக்கவும். இவற்றை அபராதத்தொகைகள் என்கிறோம். ஒரு நிரையில் (நிரலில்) இரண்டு மீச்சிறு மூலகங்கள் இருந்தால் அபராதம் பூச்சியம் என்று கொள்ளப்படும். மிகப்பெரிய அபராத எண்பெற்ற நிரையை (அல்லது நிரலை) எடுத்துக்கொண்டு அதில் மிகக்குறைந்த செலவுக்கெழு பெற்ற கட்டத்தில் கட்டுப்பாடுகளுக்கு முரணில்லாமல் இயன்றளவு சரக்கின் அளவைக் குறிக்கவும். அந்த நிரை (நிரல்) பெற்ற மொத்த அளவில் எஞ்சியதை முறையே அடுத்த மிகச்சிறிய செலவுக்கெழு பெற்ற கட்டத்திற்கு அனுப்பவும். ஒவ்வொரு நிலையிலும் இந்த முறையைப் பின்பற்றும்போது ஒரு நிரை அல்லது நிரல் அணியிலிருந்து நீக்கப்படுகிறது.

அட்டவணை (5.13)-ல் கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்கு இம்முறையைப் பயன்படுத்தி செய்தக்க தீர்வு காண்போம். அபராதத் தொகைகள் நிரைகளுக்கு முறையே 1, 2, 1 என்றும் நிரல்களுக்கு முறையே 1, 0, 0, 1 ஆகும். மிக அதிக அபராத எண் பெற்ற இரண்டாம் நிரையை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் x_{24}-க்குச் செலவு 0 என்பதால் D_4 பெறக்கூடிய 6 அலகுகளை அக்கட்டத்தில்

குறித்துவிட்டு S_2–ன் எஞ்சிய 2 அலகுகளை அடுத்துக் குறைந்த செலவுக்கெழு பெற்ற D_3-க்கு அனுப்புகிறோம். எனவே $x_{21} = x_{22} = 0$; $x_{23} = 2$; $x_{24} = 6$ ஆகும். மேலும் $x_{14} = x_{34} = 0$ ஆக வேண்டும். ($x_{24} = 6 = b_4 = D_4$-பெறவேண்டிய சரக்கு).

இப்பொழுது இரண்டாம் நிரையையும், நான்காம் நிரலையும் நீக்கிவிட்டு எஞ்சிய அணிக்கு இதே முறையைப் பயன்படுத்துக. அபராத எண் 1 பெற்ற நிரை அல்லது நிரல் ஏதாவதொன்றை எடுத்துக்கொள்வோம். முதல் நிரலை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் மிகக் குறைந்த செலவுக்கெழு பூச்சியம் x_{31} என்ற மூலகம் பெற்றிருக்கிறது. D_1–க்குச் சேரவேண்டிய 4 அலகு சரக்கையும் S_3-லிருந்து D_1-க்குக் கொடுப்போம். எனவே $x_{11} = x_{21} = 0$. இந்த நிலையில் முதல் நிரலை நீக்கி விடுகிறோம். இம்மாதிரியே தொடர்ந்து மற்ற மூலகங்களையும் காணலாம். இந்த முறையில் கிடைக்கும் தீர்வு கீழே அட்டவணை (5.17)-ல் தரப்படுகிறது. இந்த அட்டவணையிலேயே அபராத எண்களும் சுழிக்கப்பட்டுக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. தற்செயலாக அட்டவணை (5.17) கொடுக்கும் தீர்வு அட்டவணை (5.16) கொடுக்கும் தீர்வாகவே

அட்டவணை (5.17) முறை (இ)

சேரிடம் / கிடைக்குமிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	மொத்தம்	அபராதம்
S_1	0 / 1	6 / 2	0 / 3	0 / 4	6	(1)
S_2	0 / 4	0 / 3	2 / 2	6 / 0	8	(2)
S_3	4 / 0	0 / 2	6 / 2	0 / 1	10	(1)
மொத்தம்	4	6	8	6	24	
அபராதம்	(1)	(0)	(0)	(1)		

போக்குவரத்துச் செலவு = 28

அமைந்துள்ளது. ஆனால் எல்லாப் பிரச்சினைகளுக்கும் இவ்வாறு இருந்தாக வேண்டும் என்பதில்லை.

5.6 கணக்கீட்டு முறைகள்—மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு காணல்:

மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு காண்பதற்கான பின்வரும் முறை டான்ட்சிக் என்பவரால் கையாளப்பட்டதாகும். இது சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் அடிப்படையிலேயே அமைந்தது ஆகும். அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு ஒன்று போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குக் கொடுக்கப் பட்டால் அடிப்படைத்தீர்வில் உள்ள ஒவ்வொரு x_{ij}–க்கும் சரியாக $c_{ij} = u_i + v_j$ என்னுமாறு u_i, v_j– க்களை நம் விருப்பம் போல் காணலாம். அடிப்படையில் இல்லாத மாறிகள் x_{ij}-க்களுக்கு $\overline{c_{ij}} = u_i + v_j$ என்று எழுதி $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$-க்களைக் கணக்கிடவும். இவை யாவும் மிகையல்லா எண்கள் என்றால் நாம் எடுத்துக் கொண்ட தீர்வு மீச்சிறு தீர்வாகும். இந்த நிபந்தனை நிறைவு பெறவில்லை என்றால் வேறோர் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வைக் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு முந்திய குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பை விடக் குறைவாக இருக்குமாறு காணமுடியும். வழக்கமான சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைக் கையாளாமல் எளிதாக $\overline{c_{ij}}$-களைக் கணக்கிடும் முறையையும் அவற்றிலிருந்து படிப்படியாக ஒரு சில செயல் முறைகளுக்குப் பிறகு முந்தியதை விடப்பிந்தியது சிறந்தது—சிறிய மதிப்பைக் குறிக்கோள் சார்புக்குத் தரவல்லது–என்கின்ற வகையில் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வுகள் காணுகின்ற முறைகளையும் ஈண்டு விவரிக்கின்றோம். $\overline{c_{ij}}$-க்களை மறைவுச் செலவுக்கெழுக்கள் (shadow costs) என்று கூறுகிறோம்.

(c_{ij}), (x_{ij}) என்பன முறையே செலவுகள் அணியையும், மாறிகள் அணியையும் குறித்தால் போக்குவரத்துக்கான மொத்த செலவு x_0 என்பது

$$x_0 = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

என்பதால் கொடுக்கப்படுகிறது. கேடுறு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் $m + n - 1$ மாறிகள் மிகையாகவும் எஞ்சியவை பூச்சியமாகவும் அதில் இருக்கும். $x_{ij} > 0$ என்னும் போது $c_{ij} = u_i + v_j$ என எழுதுகிறோம். இவை $m+n$ மாறிகளில் (u_i–கள் m, v_j–கள் n) $m + n - 1$ சமன்பாடுகள் ஆகும். எனவே இதற்குப் பல தீர்வுகள் உண்டு. ஏதாவது ஒரு u_i (அல்லது v_j)-க்கு விருப்பம்போல் மதிப்பு கொடுத்து $m + n - 1$ மாறிகளில் மேற்கூறிய $m + n - 1$ சமன்பாடுகளிலிருந்து மற்ற (u_i, v_j-க்களை எளிதில் காணலாம். $x_{ij} \ngtr 0$ என்றவிடத்து $\overline{c_{ij}} = u_i + v_j$ என வரையறுத்துக் கொள்கிறோம். எனவே $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$ என்பது அடிப்படை மாறிகளுக்குப் பூச்சியம் என்று தெரிகிறது.

இனி,

$$x_0 = \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} = -\sum_i \sum_j (\overline{c_{ij}} - c_{ij})\, x_{ij} + \sum_i \sum_j \overline{c_{ij}}\, x_{ij}$$

$$= -\sum_i \sum_j (\overline{c_{ij}} - c_{ij})\, x_{ij} + \sum_i \sum_j (u_i + v_j)\, x_{ij}$$

$$= -\sum_i \sum_j (\overline{c_{ij}} - c_{ij})\, x_{ij} + \sum_i u_i \sum_j x_{ij} + \sum_j v_j \sum_i x_{ij}$$

$$= -\sum_i \sum_j (\overline{c_{ij}} - c_{ij})\, x_{ij} + \sum_i a_i\, u_i + \sum_j b_j\, v_j$$

ஆனால் $\overline{c_{ij}} = c_{ij}$ என்பது அனைத்து $x_{ij} \neq 0$-க்கும் உண்மை. எனவே,

$$\sum_i \sum_j (\overline{c_{ij}} - c_{ij})\, x_{ij} = 0$$

ஆகும். ஆகையால்,

$$x_0 = \sum_i a_i\, u_i + \sum_j b_j\, v_j$$

ஏதாவது i, j-க்களுக்கு $\overline{c_{ij}} - c_{ij} > 0$ என்றால் சிறப்பான வேறொரு தீர்வு காண முடியும். (i, j) – இடத்து கூடுதலான சரக்கு α அனுப்பினால் (இந்த இடத்தில் முந்திய தீர்வு பூச்சியம் ஆகும்) மொத்தச் செலவு $\alpha\, (\overline{c_{ij}} - c_{ij})$ அளவு குறைகிறது. எனவே $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$ நிரம்பவும் மிகையாக உள்ள (i, j) – இடத்து பூச்சியத்தை இயன்ற அளவு அதிகமாக்கினால் போக்குவரத்துச் செலவு மிக அதிகமாகக் குறைக்கப்படலாம். இந்தத் தத்துவத்தை மனதிற்கொண்டு α-ஐக் காண்கிறோம். அதே சமயம் கட்டுப்பாடுகள் (5·1), (5·2)-களும் மீறப்படாமல் இருக்கவேண்டும். இந்த (i, j) இடத்து மூலகம் மிகையாவதால் வேறொரு x_{ij} பூச்சியமாகும். ஒரு புதிய அடிப்படை கிடைக்கிறது. முன் போலவே புதிய அடிப்படைக்கும் u_i, v_j-க்களைக் கண்டு மேலே விவரித்த முறையைச் செயல்படுத்துகிறோம். இந்தச் செயல்முறை $\overline{c_{ij}} - c_{ij} < 0$ அனைத்து i, j-க்கும் என்ற நிலை வரும் வரையில் தொடரப்படுகிறது. இறுதி நிலையில் போக்குவரத்துச் செலவு மீச்சிறுமம் ஆகிறது.

அட்டவணை (5·18)-ல் 3×4 போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கான மறைவுச் செலவுக் கெழுக்கள் ஒதுக்கீட்டு (allocation) அட்டவணையிலேயே எவ்வாறு காட்டப்படக்கூடும் என்பது விளக்கப்பட்டுள்ளது.

அட்டவணை (5-18)

கிடைக்குமிடம்	சேரிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	
	v_j / u_i	v_1	v_2	v_3	v_4	மொத்தம்
S_1	u_1	x_{11} / $\bar{c}_{11}-c_{11}$	x_{12} / $\bar{c}_{12}-c_{12}$	0 / $\bar{c}_{13}-c_{13}$	0 / $\bar{c}_{14}-c_{14}$	a_1
S_2	u_2	0 / $\bar{c}_{21}-c_{21}$	x_{22} / $\bar{c}_{22}-c_{22}$	x_{23} / $\bar{c}_{23}-c_{23}$	0 / $\bar{c}_{24}-c_{24}$	a_2
S_3	u_3	0 / $\bar{c}_{31}-c_{31}$	0 / $\bar{c}_{32}-c_{32}$	x_{33} / $\bar{c}_{33}-c_{33}$	x_{34} / $\bar{c}_{34}-c_{34}$	a_3
	மொத்தம்	b_1	b_2	b_3	b_4	A

அடிப்படை மாறிகள் $x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}$

x_{ij} அடிப்படையில் இருந்தால் $c_{ij} = c_{ij}$

x_{ij} அடிப்படையில் இல்லை எனின் $c_{ij} = u_i + v_j$

எடுத்துக்காட்டு (1) : அட்டவணை (5·19)-ல் கொடுக்கப்பட்ட **4 × 6** போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு காண்க.

அட்டவணை (5·19)

சேரிடம்

கிடைக்குமிடம்	c_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	மொத்தம்
	S_1	1	2	1	4	5	2	30
	S_2	3	3	2	1	4	3	50
	S_3	4	2	5	9	6	2	75
	S_4	3	1	7	3	4	6	20
	மொத்தம்	20	40	30	10	50	25	175

தீர்வு : § 5·5-ல் விவரிக்கப்பட்ட ஏதாவதொரு முறையைப் பின்பற்றி முதலில் பிரச்சினைக்கு ஒரு செய்தக்க தீர்வு காண்போம். அணி மீச்சிறும முறைப்படி காணப்பட்ட முதனிலை செய்தக்க தீர்வும் அதற்கான u_i, v_j-க்களும் அட்டவணை (5·20)-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. பூச்சியம் மதிப்பு பெற்ற மாறிகளின் கட்டங்களில் $\overline{c_{ij}} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ கண்டு குறிக்கப்பட்டுள்ளது. $u_1 = 0$ எனக் கொள்ளப்பட்டது.

அட்டவணை (5·20)

கிடைக்குமிடம்	சேரிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
	u_i \ v_j	1	2	1	0	6	2	மொத்தம்
S_1	0	20 / 1	2-2	10 / 1	0-4	6-8	2-2	30
S_2	1	2-3	3-3	20 / 2	10 / 1	7-4	20 / 3	50
S_3	0	1-4	20 / 2	1-5	0-9	50 / 6	5 / 2	75
S_4	−1	0-3	20 / 1	0-7	−1-3	5-4	1-6	20
	மொத்தம்	20	40	30	10	50	25	175

மேலும் அட்டவணை (5.20)-இலிருந்து முதனிலை மதிப்பாகக் குறிக்கோள் சார்பு

$$20\times 1 + 10\times 1 + 20\times 2 + 10\times 1 + 20\times 3 + 20\times 2 + 50\times 6 + 5\times 2 + 20\times 1 = 510$$

என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது என்பதையும் காண்கிறோம்.

அட்டவணையில் குறித்துள்ள $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$-க்களின் மதிப்புகளிலிருந்து (2,5) கட்டத்திலுள்ளதே மிகவும் மிகையானது என்று அறிகிறோம். எனவே x_{25}-ஐ அடிப்படை மாறியாக மாற்ற வேண்டும். S_2-இலிருந்து D_5-க்கு α அலகுகள் சரக்கு அனுப்புவதாகக் கொள்வோம். இதன் காரணமாக மற்ற ஒதுக்கீடுகளிலும் சில மாற்றங்களைச் செய்து நிரை, நிரல் கூட்டல்கள் மாறாதவாறு பார்த்துக் கொள்கிறோம். இந்த நிலையில் ஒதுக்கீடுகளுக்கான அணி பின்வருமாறு இருக்கும்:

$$
\begin{array}{c}
\\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 \\
20 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20 & 10 & \alpha & 20-\alpha \\
0 & 20 & 0 & 0 & 50-\alpha & 5+\alpha \\
0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{c}
\\ 30 \\ 50 \\ 75 \\ 20 \\ \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
20 & 40 & 30 & 0 & 50 & 25
\end{array}
$$

இந்த 4 × 6 அணியில் 4 + 6—1 = 9 மிகை மூலகங்களே இருக்க வேண்டும். ஆனால் 10 மூலகங்கள் மிகையாக உள்ளன. α-ன் மதிப்பை உயர்த்தி இவற்றுள் ஒன்றை பூச்சியமாகவும் எஞ்சிய 9-ம் மிகையாக இருக்குமாறும் செய்கிறோம். α-ஐ அதிகரிக்கும் போது (2, 6) அல்லது (3, 5) கட்டத்தின் மூலகங்களே குறைவுற்று பூச்சியமாகக் கூடியவை. அதிலும் $\alpha > 20$ எனின் $20-\alpha$ குறையெண் ஆகிவிடும். எனவே α-ன் மீப்பெருமதிப்பு 20 ஆகும். எனவே x_{26}-ஐ நீக்கிவிட்டு x_{25}-ஐ அடிப்படை மாறியாக்குகிறோம்.

அட்டவணை (5.21) - ல் புதிய அடிப்படை செய்தக்க தீர்வும், முன்போலவே காணப்பட்ட u_i, v_j-க்களும் அடிப்படையல்லா மாறிகள் கட்டங்களில் $\overline{c_{ij}}-c_{ij}$-க்களும் கணக்கிடப்பட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன. இப்புதிய தீர்விற்கு குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு 450 ஆகும்.

அட்டவணை (5.21)

கிடைக்குமிடம்	சேரிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	
	u_i \ v_j	1	−1	1	0	3	−1	மொத்தம்
S_1	0	20 / 1	−1−2	10 / 1	0−4	3−5	−1−2	30
S_2	1	2−3	0−3	20 / 2	10 / 1	20 / 4	0−3	50
S_3	3	4−4	20 / 2	4−5	3−9	30 / 6	25 / 2	75
S_4	2	3−3	20 / 1	3−7	2−3	5−4	1−6	20
	மொத்தம்	20	40	30	10	50	25	175

$\overline{c_{ij}}-c_{ij} > 0$ என்று $i = 4$, $j = 5$ என்னும்போது மட்டும் ஆகிறது. எனவே x_{45} அடிப்படை மாறியாக மாற்றுகிறோம். முன்போலவே S_4-இலிருந்து D_5-க்கு α அலகு ஒதுக்கீடு செய்து, ஏனைய கட்டுப்பாடு

களுக்கு இணங்க α- ன் மதிப்பை அதிகரித்துப் புதிய அடிப்படை ஒன்றை அமைப்போம். $x_{45} = \alpha$ என்றால் ஒதுக்கீடுகள் பின்வரும் அணியில் காட்டப்பட்டுள்ளன:

$$\begin{matrix} & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & \\ S_1 & 20 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ S_2 & 0 & 0 & 20 & 10 & 20 & 0 & 50 \\ S_3 & 0 & 20+\alpha & 0 & 0 & 30-\alpha & 25 & 75 \\ S_4 & 0 & 20-\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 20 \\ & 20 & 40 & 30 & 10 & 50 & 25 & \end{matrix}$$

இந்த அணியில் 9 மூலகங்களே மிகை எண்களாக இருக்கக் கூடுமாதலால் α-ஐ அதிகரித்து ஏதாவதொரு அடிப்படை மாறியைப் பூச்சியமாக்குகிறோம். $\alpha > 20$ என்றால் $x_{42} = 20 - \alpha$ குறையெண் ஆகிவிடுகிறது. எனவே $\alpha = 20$ எனக் கொள்ளவேண்டும். இந்த நிலையில் அடிப்படைத் தீர்வு அட்டவணை (5.22)-ல் தரப்பட்டுள்ளது. முன்போலவே இந்த அட்டவணைக்கும u_i, v_j-க்களும் $\bar{c}_{ij} - c_{ij}$ - க்களும் கணக்கிடப்பட்டுள்ளன. ஆனால் இப்பொழுது அனைத்துக் கட்டங்களிலும் $\bar{c}_{ij} - c_{ij} \leq 0$ என்பதால் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு மீச்சிறுமமாகி விடுகிறது. குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு 430 ஆகும்.

அட்டவணை (5.22)

கிடைக்குமிடம்	சேரிடம்	D1	D2	D3	D4	D5	D6	
	u_i \ v_j	1	−1	1	0	3	−1	மொத்தம்
S1	0	20 / 1	−1−2	10 / 1	0−4	3−5	−1−2	30
S2	1	2−3	0−3	20 / 2	10 / 1	20 / 4	0−3	50
S3	3	4−4	40 / 2	4−5	3−9	10 / 6	25 / 2	75
S4	1	2−3	0−1	2−7	1−3	20 / 4	0−6	20
	மொத்தம்	20	40	30	10	50	25	175

எடுத்துக்காட்டு (2): அட்டவணை (5.23)-ல் கொடுக்கப்பட்ட போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு காண்க.

அட்டவணை (5·23)

c_{ij}		சேரிடங்கள் D_1	D_2	D_3	D_4	கிடைக்கும் அளவுகள் a_i
கிடைக்குமிடங்கள்	S_1	4	3	0	5	24
	S_2	1	2	6	1	17
	S_3	3	6	2	3	19
b_j தேவைகள்		13	9	7	14	

தீர்வு : இந்த கணக்கில் $\sum a_i = 60$; $\sum b_j = 43$ என்று உள்ளது. இதைச் சமன் செய்யப்படாத (unbalanced) போக்குவரத்துப் பிரச்சினை என்கிறோம். இதன் தீர்வு காணப் போலிச்சேரிடம் (dummy destination) D_5-ஐ ஒவ்வொரு கிடைக்குமிடத்திலிருந்தும் 0 போக்குவரத்துச் செலவில் எடுத்துக்கொள்கிறோம். $\Sigma a_i - \Sigma b_j = 17$-ஐ இதன் தேவையாகக் குறித்து, வடமேற்கு மூலை விதிப்படி அட்டவணை (5.24)-ல் கீழே கொடுத்துள்ளபடி முதனிலை செய்தக்க தீர்வு பெறுகிறோம். இத் தீர்விற்கான u_i, v_j-க்களும் $\overline{c_{ij}} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$-களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன ; $u_1 = 0$ என்று எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது. இந்த நிலையில் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு 127 ஆகும்.

ஒதிக்கீட்டு அணியில் இப்போது $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$-க்களுள் (2, 1), (3, 1) மூலகங்கள் இரண்டும் மிகவும் அதிகமான மிகை மதிப்பு 9-ஐப் பெற்றுள்ளன. எனவே, நமது வழக்கப்படி (convention) (2, 1) மூலகத்தை அடிப்படை வெக்டராக்குகிறோம். α அளவு S_2-ல் இருந்து D_1-க்கு ஒதுக்கீடு செய்தால் (1,1)-ல் α குறைக்கவேண்டும். (1, 3)-ல் α கூட்ட வேண்டும் ; (2, 3)-ல் α குறைக்கவேண்டும். இதன் காரணமாக இந்தக்கட்டங்களில் ஒதுக்கீடுகள் $13-\alpha$, $2+\alpha$, $5-\alpha$ என்று முறையே மாறுகின்றன. தீர்வில் $5 + 3 - 1 = 7$ பூச்சியமல்லாத மூலகங்களே இருக்கலாம் என்பதால் α-ஐ 5 வரை உயர்த்தி அட்டவணை (5.25) - ஐப் பெறுகிறோம். புதிதாக

u_i, v_j–க்களைக் கணக்கிட்டு (1,5)-ல் உள்ள மூலகத்தை மிகையாக்கு கிறோம். இதன் காரணம் (1, 1)-ல் உள்ள மூலகம் 0 ஆகிறது. முன்போலவே அட்டவணை (5.26)–ஐப் பெறுகிறோம். திரும்பவும் u_i, v_j- க்களைக் கணக்கிட்டு $\overline{c_{ij}} - c_j$-க்களைக் காண்கிறோம். எல்லா கட்டங்களில் $\overline{c_{ij}} - c_{ij} < 0$ என்று கிடைத்து விடுவதால் இறுதித் தீர்வை இந்த அட்டவணை தருகிறது என அறியலாம். இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு தேவையான ஒதுக்கீட்டைத் தருகிறது. போக்கு வரத்துச் செலவின் மீச்சிறு மதிப்பு 74 ஆகும்.

அட்டவணை (5·24) முதனிலை

கிடைக்குமிடம்	சேரிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	போலி D_5	
	u_i \ v_j	4	3	0	−5	−8	மொத்தம்
S_1	0	13 (0)	9 (0)	2 (0)	(−10)	(−8)	24
S_2	6	* (9)	(7)	5 (0)	12 (0)	(−2)	17
S_3	8	(9)	(5)	(6)	2 (0)	17 (0)	19
	மொத்தம்	13	9	7	14	17	60

இறுதித் தீர்வில் S_1-ல் இருந்து 8 அலகுகளும், S_3-ல் இருந்து 9 அலகுகளும் போலிச் சேரிடத்திற்கு அனுப்பப்படுகின்றன என்று தெரிகிறது. அதாவது தேவைக்குமேல் உபரி உற்பத்தி S_1- ல் 8 அலகுகளும் S_2-ல் 9 அலகுகளும் எஞ்சியுள்ளன என்று அறியலாம்.

அட்டவணை (5·25) இரண்டாம் நிலை

கிடைக்குமிடம்	சேரிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
	u_i \ v_j	4	3	0	4	1	மொத்தம்
S_1	0	8 (0)	9 (0)	7 (0)	(−1)	* (1)	24
S_2	−3	5 (0)	(−2)	(−9)	12 (0)	(−2)	17
S_3	−1	(0)	(−4)	(−1)	2 (0)	17 (0)	19
	மொத்தம்	13	9	7	14	17	60

செலவு = 62

அட்டவணை (5·26) இறுதி நிலை

கிடைக்குமிடம்	சேரிடம்	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
	$u_i \backslash v_j$	3	3	0	3	0	மொத்தம்
S_1	0	−1	(9) 0	(7) 0	−2	(8) 0	24
S_2	−2	(13) 0	−1	−8	(4) 0	−2	17
S_3	0	0	−3	−2	(10) 0	(9) 0	19
	மொத்தம்	13	9	7	14	17	60

செலவு = 74

பயிற்சிகள்—பாடம் 5

(5.1) பின்வரும் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளுக்கு அடிப்படை செய்தக்க தீர்வுகள் காண்க: (காஸ்)

(i)

$$\begin{array}{ccccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & 2 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 4 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & 7 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 2 & 2 & 13 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & 3 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & 4 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & 7 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & 14 \end{array}$$

(5.2) பின்வரும் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண்க: (அணியின் மூலகங்கள் i-வது கிடைக்குமிடத்திலிருந்து j-வது சேரிடத்திற்கு போக்குவரத்துச் செலவு c_{ij} ஆகும்.) (ஃப்ரோபெர்க்)

(i)

c_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	13	11	15	20	4
S_2	17	14	12	13	6
S_3	18	18	15	12	5
b_j	3	3	4	5	15

(ii)

c_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	19	15	19	20	100
S_2	20	23	17	31	100
S_3	14	25	20	18	100
b_j	75	75	75	75	300

(iii)

c_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	3	3	9	16	8
S_2	6	11	14	9	9
S_3	5	13	10	12	13
b_j	6	7	7	10	

(5.3) B_i என்னும் நான்கு விமான தளங்களும் (bases) T_j என்னும் 3 இலக்குகளும் (targets) உள்ளன. விமான அமைப்புகள், இலக்கிற்கான வீச்சு, பறக்கும் உயரம் இவற்றின் காரணமாக ஒவ்வொரு தளத்திலிருந்தும் வெவ்வேறு இலக்கு களுக்கு ஒரு விமானத்தில் அனுப்பிவைக்கக்கூடிய வெடிகுண்டு களின் (bombs) நிறைகள் (டன்களில்) பின்வரும் அட்ட வணைக் கிணங்க மாறுபடுகின்றன :

	c_{ij}	இலக்குகள்			மொத்தம்
		T_1	T_2	T_3	
தளங்கள்	B_1	8	6	5	150
	B_2	6	6	6	150
	B_3	10	8	4	150
	B_4	8	6	4	150
	மொத்தம்	200	200	200	600

இங்கு c_{ij} = ஒரு விமானம் ஏற்கும் வெடிகுண்டுகளின் நிறை (டன்களில்) — (i–வது தளத்திலிருந்து j-வது இலக்கிற்குப் போகும்போது.)

ஒவ்வொரு தளத்திலிருந்தும் ஒரு நாளைக்கு 150 விமானங்களும் ஒவ்வொரு இலக்கிற்கும் 200 விமானங்களும் பறக்கக் கூடும் என்றால் மிக அதிக நிறை வெடிகுண்டுகளை இலக்கிற்குச் செலுத்தும் விமான ஒதுக்கீடுகளைக் காண்க.

[ஜோசஃப்- (காஸ்)]

குறிப்பு : $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$–கள் யாவும் மிகையாக மாறும் வரை u_i, v_j-களை திரும்ப திரும்பக் காணவேண்டும்.

(5·4) சென்னை, பம்பாய், கல்கத்தா ஆகிய மூன்று இடங்களில் உள்ள மில்களில் உற்பத்தியாகும் ஒருவகைத் துணி பங்களூர், ஹைதராபாத், நாகபுரி, ஆக்ரா, புவனேஸ்வரம் ஆகிய 5 இடங்களுக்கு விற்பனைக்கு அனுப்பப்படுகிறது. உற்பத்தியின் அளவுகள் முறையே 3, 4, 5 அலகுகள் (ஆயிரம் மீட்டர்கள் என்று கூடக்கொள்ளலாம்!) தேவையின் அளவுகள் முறையே 1, 3, 3·5, 2·5, 2 அலகுகள். பின்வரும் அணியில் உற்பத்தியாகும் ஒவ்வொரு இடத்திலிருந்தும் தேவைப்படும் ஒவ்வொரு இடத்திற்கும் எடுத்துச் செல்லப்பட்டு விற்பனையாகும் ஓரலகுத் துணிக்கான இலாபம் ஆயிரம் ரூபாய்களில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. மிக அதிக இலாபம் பெறுவதற்கான சிறந்த ஒதுக்கீட்டைக் (allocation) காண்க.

இலாபம்	பங்களூர்	ஹைதரா பாத்	நாகபுரி	ஆக்ரா	புவனேஸ் வரம்	உற்பத்தி அளவுகள்
சென்னை	1·0	1·2	1·6	1·7	1·4	3
பம்பாய்	1·2	1·0	1·2	1·5	1·7	4
கல்கத்தா	1·6	1·0	1·3	1·1	1·0	5
தேவைகள்	1	3	3·5	2·5	2	12

(5·5) முறையே 800, 500 அலகுகள் கச்சாப்பொருள் S_1, S_2 என்ற இடங்களில் உள்ளது. D_1, D_2, D_3 என்ற இடங்களுக்குத் தேவைகள் முறையே 300, 300, 400 அலகுகள் ஆகும். போக்கு வரத்துச் செலவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. செலவு மீச்சிறுமம் ஆவதற்குச் சேரிடங்கள் கிடைக்குமிடங்கள் ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் தமது தேவையை எவ்வாறு நிறைவு செய்துகொள்ள வேண்டும் என்பதைக் காண்க.

சேரிடங்கள் / கிடைக்கு மிடங்கள்	D_1	D_2	D_3	கிடைக்கும் அளவுகள்
S_1	30	20	10	800
S_2	5	15	25	500
தேவைகள்	300	300	400	↖ மாலவுகள்

குறிப்பு : கிடைக்கும் அளவின் மொத்தம் தேவைகளின் மொத்தத்தை விட அதிகம் என்பதால் போலிச் சேரிடம் ஒன்றை எடுத்துக்கொண்டு அதற்கான போக்குவரத்துச் செலவு 0 என்று கொண்டு வழக்கமான முறையில் தீர்வு காணவும்.

(5·6) பின்வரும் போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்க:

c_{ij} ↘	D_1	D_2	D_3	D_4	கிடைக்கும் அளவுகள்
S_1	5	3	8	7	7
S_2	6	5	4	7	5
S_3	2	3	5	3	6
தேவைகள்	3	5	8	7	

குறிப்பு: போலிக் கிடைக்குமிடம் ஒன்றை (S_4) வரையறை செய்து கொள்ளவும்.

6. துணையலகு நெறிப்படுத்துதல்

(Parametric Programming)

6.1 வரையறை :

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் வளர்ச்சியில் ஒரு முக்கிய கட்டம் அதன் வரையறையில் வருகின்ற கெழுக்கள் a_{ij}, b_i, c_j ஆகியவற்றின் சரியான நம்பிக்கைக்கு உகந்த மதிப்புகளைக் காண முயல்வதேயாகும். இக்கெழுக்களைப் பிரச்சினையின் துணை யலகுகள் என்று கூறுகிறோம். இவற்றில் ஏற்படும் மாறுதல் களுக்கு ஏற்பத் தீர்வுகள் எங்ஙனம் பாதிக்கப்படுகின்றன என்பதை ஆராய்வதே துணையலகு நெறிப்படுத்துதல் எனப்படும். இந்த ஆராய்ச்சியை மூன்று நிலைகளில் செய்யலாம் —(i) கெழுக்கள் அணியின் மூலகங்கள் a_{ij}–க்களின் மாறுதல்கள்; (ii) குறிக் கோள் சார்பின் செலவுக் கெழுக்கள் c_j–க்களின் மாறுதல்கள்; (iii) வலதுபுற மூலகங்கள் b_i-களின் மாறுதல்கள் ; இவற்றுள் (i)–ஐப்பற்றி விவரங்கள் மிகவும் அண்மையிலேயே காணப் பட்டுள்ளன. (iii)-வது நிலையை (ii)-வது நிலையின் இருமைப் பிரச்சினையாக ஆராயக்கூடும். எனவே, நாம் (ii)-வது நிலையை யும் (iii)-வது நிலையையும் மட்டும் ஓரளவு இந்தப் பாடத்தில் ஆராய்கிறோம்.

உற்பத்திக்கான திட்டங்களை வகுப்பதிலும், இருப்புச் சரக்கு களைக் கட்டுப்படுத்தித் தேவைக்கும், உற்பத்திக்கும் இடையே சமநிலை ஏற்பட வழி வகுக்கவும் துணையலகு நெறிப்படுத்துதல் முறைகள் மிகவும் பயன்படுகின்றன. நடைமுறையில் குறிக்கோள் சார்பின் துணையலகு நெறிப்படுத்துதலை விட வலப்புற துணையலகு நெறிப்படுத்துதலே பெரிதும் கையாளப்படுகிறது.

6·2 குறிக்கோள் சார்பின் துணையலகு :

பின்வரும் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை ஆராய்வோம்:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}\right\} \qquad (6{\cdot}1)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \qquad (6.2)$$

என்னும் குறிக்கோள் சார்பினை மீச்சிறுமப் படுத்தும்

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

என்ற வெக்டரைக் காணவேண்டும்.

குறிக்கோள் சார்பின் செலவுக்கெழு c_j-ஐ $d_j + \theta\, d_j'$, $j = 1, 2, \ldots n$ என எழுதுவோம். $-\infty < \eta \leqslant \theta \leqslant \zeta < \infty$ என்க. இங்கு η, ζ என்பன முடிவுள்ள எண்கள் ஆயினும், முதலாவது மிகச்சிறிய எண் என்றும், இரண்டாவது மிகப்பெரிய எண் என்றும் கொள்ளப்படும். (η, ζ) என்னும் இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு θ-விற்கும் பிரச்சினையின் தீர்வு காண்பதே துணையலகுக் குறிக்கோள் சார்புப் பிரச்சினையாகும்.

பிரச்சினை கேடுருதது என்றும் ஓர் அடிப்படைத்தீர்வு நமக்குத் தெரியும் என்றும் கொள்வோம். சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி $\theta = \eta$ என்று எடுத்துக்கொண்டால் பின்வரும் இரு நிலைகளில் ஒன்று நிகழவேண்டும் :

நிலை (அ) : பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு உண்டு.

நிலை (ஆ) : $\theta = \eta$ என்னும்போது கட்டுப்பாடுகள் (6·1) அமைக்கும் குவிகணத்தில் முடிவுள்ள மீச்சிறுமத்தை (6·2) பெற்றிருக்காது.

நிலை (அ) : பாடம் 3-ல் எடுத்துக்கொண்டதுபோல் z_j இருந்தால் $z_j - c_j$ என்பன θ-ல் நேரியச் சார்புகள் ஆகும். அதாவது அவற்றை $\alpha_j + \theta\, \beta_j$ என எழுதலாம். நாம் பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு $\theta = \eta$ என்று இருக்கிறது எனக்கொள்வதால் இறுதிநிலையில்

$$\alpha_j + \eta\, \beta_j \;\; < 0 \quad , \; j = 1, 2, \ldots, n$$

என்பது உண்மையாகவேண்டும். எனவே

$$\alpha_j + \theta\, \beta_j \;\; < 0 \quad , \; j = 1, 2, \ldots, n \qquad (6·3)$$

என்னும் சமனின்மைகள் ஒவ்வும் பண்பு (consistent) பெற்றவையே. ஆகையால் இதிலிருந்து உடனடியாக

அனைத்து $\beta_j < 0$-க்கும் $\theta > -\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}$ என்றும்

அனைத்து $\beta_j > 0$-க்கும் $\theta < -\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}$ என்றும்

அறியலாம்.

$$\theta_1 = \begin{cases} \text{மீப்பெருமம்} \\ \beta_j < 0 \end{cases} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)$$

$$- \infty \text{, எல்லா } \beta_j > 0 \text{ என்றால்}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \text{மீச்சிறுமம்} \\ \beta_j > 0 \end{cases} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)$$

$$- + \infty \text{, எல்லா } \beta_j \leqslant 0 \text{ என்றால்}$$

என்று வரையறுத்துக் கொண்டால் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி நடைமுறைத்தீர்வு (6·3)-ஐ நிறைவு செய்யும். அதாவது

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$$

என்றுள்ள அனைத்து θ - க்களுக்கும் மீச்சிறு தீர்வைத்தரும். $\theta_2 = + \infty$ என்றால் மேலே தொடரவேண்டிய தேவை இல்லை. எனவே $\theta_2 < \infty$ என்போம். $j=k$ என்னும்போது $\theta_2 = - \alpha_k/\beta_k$, $\beta_k > 0$ என்போம். k–வது நிரலின் அனைத்து கெழுக்கள் x_{ik}-களும் மிகையல்லா எண்கள் என்றால் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையிலிருந்தும், θ_2–ன் வரையறையிலிருந்தும் $\theta > \theta_2$ என்னும்போது பிரச்சினைக்குத் தீர்வு கிடையாது என்பதை அறிகிறோம். எனவே θ – வை θ_2 வரைதான் பெரிதாக்க முடியும்; அதாவது $\zeta = \theta_2$ ஆகும். மாறாக ஒரு x_{ik} ஆவது மிகை எண் என்றால் வழக்கமான முறையில் P_k என்ற வெக்டரை அடிப்படையில் உட்புகுத்தி ஏதோவொரு வெக்டர் P_l –ஐ நீக்குகிறோம். $x_{lk} > 0$ என்பது மைய உறுப்பாகும்.

புதிய அடிப்படை θ-ன் ஏதோ ஒரு மதிப்பிற்கு மீச்சிறு மதிப்பைக் குறிக்கோள் சார்பிற்கு அளிக்க வேண்டும். $\theta_1' \leqslant \theta \leqslant \theta_2'$ என்ற இடைவெளி θ-ன் இம்மாதிரி மதிப்புகளைக் குறித்தால் $\theta_1' = \theta_2$ என நிரூபிக்கலாம்.

புது அடிப்படை செய்தக்கது என்றும், தானாகவே விளங்கக்கூடிய (obvious) குறியீட்டில் இந்த அடிப்படைக்கு

$$\alpha_j' + \theta\, \beta_j' \leqslant 0 \;, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{6·4}$$

என்பன ஒவ்வும் சமனின்மைகள் என்றும் கூறலாம். ஏனெனில் $\theta = \theta_2$ என்றால் P_k அடிப்படையில் நுழைக்கப்பட்டிருப்பதால், $z_k - c_k = \alpha_k + \theta_2\, \beta_k = 0$. சமனின்மைகள் (6·4) - ஐ $\theta = \theta_2$ —ம் நிறைவு செய்வதால் புதியஅடிப்படை $\theta = \theta_2$ என்னும் போதும் மீச்சிறுமத் தீர்வைக்கொடுக்கும்.

எனவே, $\theta < \theta_2$ என்னும்போது (6·4) நிறைவு செய்யப் படுவதில்லை என்பதை நிரூபித்தல் போதுமானது.

$$\alpha_l' = -\frac{\alpha_k}{x_{lk}}, \qquad \beta_l' = -\frac{\beta_k}{x_{lk}} \tag{6·5}$$

என்று நாம் அறிவோம். சமனின்மைகள் (6·4)-ல்

நீக்கப்பட்ட வெக்டர் P_l க்குச் சரியான சமனின்மை நிறைவு செய்யப்பட வேண்டுமானல்

$$\alpha_l' + \theta\beta_l' < 0$$

என்று இருக்க வேண்டும். ஆகவே (6·5) இலிருந்தும் $x_{lk} > 0$ என்பதிலிருந்தும்

$$-\alpha_k - \theta\beta_k < 0$$

என்று கிடைக்கிறது. ஆனல் $\beta_k > 0$ என்பதால் கடைசிச் சமனின்மை $\theta > -\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \theta_2$ என்று ஆகிறது.

எனவே θ-ன் மதிப்பை θ_2 விலிருந்து உயர்த்தி θ_2' வரை மாற்றினுலும் பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு கிடைக்கிறது என்று அறிகிறேம். இம்மாதிரியே ஒவ்வொரு முறையும் θ-விற்கான இடைவெளியின் மேல் எல்லை உயர்த்தப்பட்டு ஒரு நிலையில் அது ζ-க்குச் சமம் ஆகுமாறு செய்யலாம். ஆனல் இந்த முறை தொடர்ந்து செயல்படுவதற்கு அடிப்படை ஒவ்வொரு நிலையிலும் மாறிக் கொண்டே வருகிறது என்றும் ஒருமுறை கிடைத்த அடிப்படை வெக்டர்கள் திரும்பவும் அடிப்படை வெக்டர்கள் ஆவது இல்லை என்றும் கூறமுடியுமா என்று பார்க்கவேண்டும்.

θ_2-ஐ $\theta_2 + \varepsilon$ [($\varepsilon \in 0$ ஒரு சிறு மிகை எண்] என்று எடுத்துக்கொண்டால் கேடுருத்தன்மைக்கான தற்கோளிலிருந்து மேற்கூறிய முறையைச் செயல்படுத்தி $\theta = \theta_2 + \in$ என்னும்போது பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு இருக்கிறது அல்லது முடிவுள்ள மீச்சிறு தீர்வு காணமுடியாது என்ற ஏதாவது ஒரு முடிவுக்கு வரலாம். எனவே $\theta_1 = \theta = \theta_2$ என்ற நிலை தொடர்ந்து இருக்க முடியாது. தவிரவும், மேலே விவரிக்கப்பட்ட முறையில் ஓர் அடிப்படையிலிருந்து வேறு அடிப்படைக்கு மாற்றம் செய்யும்போது அதே அடிப்படைக்குத் திரும்பி வருவது என்பதோ θ_2 - ன் மதிப்புகளைவிடக் குறைந்த மதிப்புகளுக்குச் சரியான அடிப்படைக்குச் செல்வது என்பதோ இயலாத காரியம். மேலும் θ-ன் வெவ்வேறு இடைவெளிகளின் இடைவெட்டுகள் வெற்றுகணங்களாகும். θ_1, θ_2-க்களின் வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பண்பு மதிப்புகள் (characteristic values) என்றும் இவற்றிற்குச் சரியான மீச்சிறுமத் தீர்வுகளைப் பண்புத்தீர்வுகள் (characterstic solutions) என்றும் கூறுகிறேம்,

நிலை (ஆ) : இப்பொழுது $\theta = \eta$ என்பதற்கு மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு காண முற்படும்போது அடிப்படையில் உட்புகத்தகுதி பெற்ற வெக்டர் P_k -ஐ எந்த வெக்டரையும் அனைத்து x_{ik} - களும் மிகையல்லாது இருப்பதால் எதையும் நீக்கமுடியாத நிலையில், உட்புகுத்த முடிவதில்லை. இந்த நிலையில் பின்வரும் வாய்ப்புகள் உள்ளன :

(i) $\alpha_k + \theta\,\beta_k < 0, \;\; x_{ik} \leqslant 0$ என்று இருப்பதால், $\beta_k > 0$ -ம் உண்மை என்றால் பிரச்சினைக்கு முடிவுள்ள மீச்சிறு தீர்வுகள் எந்த θ – மதிப்பிற்கும் கிடையாது.

(ii) $\beta_k < 0$ என்றால் $\theta < \;\theta_1^* = -\,\dfrac{\alpha_k}{\beta_k}$ என்றவாறு உள்ள அனைத்து θ-க்கும் $\alpha_k + \theta\,\beta_k > 0$ உண்மையாகும். எனவே $\eta \leqslant \theta < \;\theta_1^*$ என்றவாறுள்ள எந்த θ - க்கும் முடிவுள்ள மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு இருக்க முடியாது. $\theta = \theta_1^*$ என்னும்போது முடிவுள்ள மீச்சிறுதீர்வுஇருக்குமா என்பதும் இந்த நிலையில் கூறமுடியாது. அனைத்து j-க்கும் $\alpha_j + \theta_1^*\,\beta_j < 0$ என்றால் θ_1^*-க்கு மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு இருக்கிறது. மேலும் θ_1-ஐ

$$\theta_1 = \underset{\beta_j > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)$$ என்னுமாறு காணலாம். பண்புத்தீர்வு $\theta_1^* < \theta \leqslant \theta_1$ என்ற θ மதிப்புகளுக்குக் காணமுடியும். இனி நிலை (அ)-செயல் முறையைப் பயன்படுத்தலாம். மாறாக, அனைத்து j-க்கும் $\alpha_j + \theta_1^*\,\beta_j \leqslant 0$ என்பது உண்மையாக இராமல் ஒரு j-க்காவது $\alpha_j + \theta_1^*\,\beta_j > 0$ என்றிருந்தால், இந்த j-க்கான வெக்டரை அடிப்படை வெக்டராக மாற்றலாம்.

மேலே விவரித்த செயல்முறையை எல்லா மாற்றப்பட்ட $\alpha_j + \theta_1^*\,\beta_j$-ம் மிகையல்லா எண்களாக மாறும் வரையிலோ அல்லது $\alpha_t + \theta_1^*\,\beta t > 0$ என்றுள்ள வெக்டர் அதன் மூலகங்கள் யாவும் மிகையல்லா எண்கள் என்ற காரணத்தால் அடிப்படையில் உட்புகத் தகுதி பெற்றிருந்தும் அடிப்படையில் புக முடியாத நிலைவரும் வரையிலோ தொடருகின்றோம். முதல் நிலையில் நிலை (அ)-ன் முறைகொண்டு செயல்படுகிறோம். இரண்டாவது நிலையில் $\beta t > 0$ என்றால் முடிவுள்ள மீச்சிறுத் தீர்வுகள் இல்லை. $\beta t < 0$ என்னும்போது $\theta < \theta_2^* = -\,\alpha_t/\beta t, \;\; \theta_2^* > \;\theta_1^*$ என்றால் முடிவுள்ள தீர்வுகள் காணமுடியாது என்று நாம் அறிவோம். $\theta = \theta_2^*$ என்றால் முடிவுள்ள தீர்வு இருக்கிறதா என்று பார்ப்போம். மேலே விவரிக்கப் பட்ட முறையைத் திரும்பத் திரும்பச் செயல்படுத்தினால் அம்

முறை நம்மை ஒரு முடிவுள்ள மீச்சிறு தீர்விற்கு கொண்டுசெல்லும் அல்லது எந்த θ-க்கும் முடிவுள்ள மீச்சிறு தீர்வு இல்லை என்பதைப் புலப்படுத்தும்.

$\theta_l \leqslant \theta \leqslant \theta_{l+1}$ என்னும் ஏதாவதொரு இடைவெளி மதிப்புகளுக்கு பண்புத்தீர்வு கொடுக்கப்பட்டால் நிலை (அ)-வைப் பயன்படுத்தி θ_{l+1}-க்கு வலப்புறம் செல்லலாம்.

$$\theta_l = \underset{\beta_j < 0}{\text{மீப்பெறுமம்}} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = -\frac{\alpha_q}{\beta_q} \quad \text{என்றவாறுள்ள}$$

P_q என்ற வெக்டரை உட்புகுத்தி θ_l-க்கு இடப்புறம் செல்லலாம். அனைத்து $x_{iq} \leqslant 0$ என்றால் $\theta < \theta_l$-க்கு முடிவுள்ள தீர்வுகள் கிடையாது.

சுருக்கமாக, நாம் இந்த முறையில் கண்டவை வருமாறு: (i) பொது சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தழுவி ஒரு துணையலகு பெற்ற குறிக்கோள் பிரச்சினையை முறையாக ஆராய முடியும். (ii) ஏதாவது முடிவுள்ள ஒரு மீச்சிறுதீர்வு தரப்படின் பண்புத் தீர்வுகள் கணம் ஒன்றையும் அத்தீர்வுகளுடன் தொடர்பு கொண்ட பண்பு மதிப்புகளையும் துணையலகின் அனைத்து நிகழ்வாய்ப்புபெற்ற மதிப்புகளுக்கும் காணலாம். (iii) துணையலகிற்கான மூடிய இடைவெளி ஒன்றில் தீர்வு மீச்சிறுமமாகிறது. (iv) மீச்சிறு தீர்வுகள் கொடுக்கும் துணையலகு θ-விற்கான கணம் தொடர்பு விடுபடாததும் (connected) மூடியதும் (closed) ஆகும்.

6·3 துணையலகும் இருமைப் பண்பும் :

கட்டுப்பாடுகளின் வலது புறங்களில் துணையலகு இருந்தால் அதைப் பின்வருமாறு சமாளிக்கிறோம்: $\mu \leqslant \lambda \leqslant \nu$ என்க. இந்த இடைவெளியின் ஒவ்வொரு λ - க்கும்,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{என்ற சார்பை}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i + \lambda b_i', \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க மீச்சிறுமப்படுத்தும் தீர்வு $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ -ஐக்காண்பதே நமது பிரச்சினையாகும்.

$\lambda = \mu$ என்னும் போது $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_n})$ பிரச்சினைக்கு ஒரு செய்தக்க மீச்சிறு தீர்வு என்போம். ஒவ்வொரு $\overline{x_i}$-ஐயும் μ-ன் நேரியச் சேர்க்கையாக $u_i + \mu\, v_i$ என்று எழுதலாம். $\bar{x}_i > 0$ என்பதால் $\bar{x}_i = u_i + \lambda\, v_i > 0$ (6·6)

என்பன ஒவ்வும் சமனின்மைகளாகும்.

அனைத்து i-க்கும் $v_i = 0$ என்றால் $\overline{X}$ அனைத்து λ-க்கும் மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வாகும். அனைத்து i-க்கும் $v_i > 0$ என்றால் $\lambda > \mu$ என்னும்போது $\overline{X}$ செய்தக்க மீச்சிறு தீர்வாகும். அனைத்து i-க்கும் $v_i \leq 0$ என்றால் $\overline{X}$ அனைத்து $\lambda \leq \mu$-க்கும் மீச்சிறு செய் தக்க தீர்வு ஆகும். பொதுவாக, v_i-கள் சில i-மதிப்புகளுக்கு மிகையாகவும், சிலவற்றிக்குக் குறையாகவும் இருக்கும். எனவே λ-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு இந்த நிலையில் $\overline{X}$ மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு ஆகும் என்பதைக்காண § 6·2-ல் குறிக்கோள் சார்புக்குப் பயன் படுத்திய முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

$v_i > 0$ என்றால், $\lambda > -\dfrac{u_i}{v_i}$ ஆகும். $v_i < 0$ என்றால்,

$\lambda < -\dfrac{u_i}{v_j}$ ஆகும். எனவே,

$$\lambda_1 = \begin{cases} \underset{v_i > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(-\dfrac{u^i}{v_i}\right) \\ -\infty \quad (\text{அனைத்து } u_i \geq 0 \text{ என்றால்}) \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} \underset{v_i < 0}{\text{மீப்பெறுமம்}} \left(-\dfrac{u}{v_i}\right) \\ +\infty \quad (\text{அனைத்து } v_i \geq 0 \text{ என்றால்}) \end{cases}$$

என்று வரையறுக்கின்றோம். (6·6)-ல் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட தீர்வு $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ என்றுள்ள λ-ன் மதிப்புகளுக்கு மீச்சிறும மாகும். λ_2 முடிவிலி அல்ல என்று கொள்வோம். ($\lambda_2 = +\infty$ என்றால் மேலே தொடர வேண்டிய தேவை இல்லை.) λ-ன் மதிப்பை அதிகரிக்கும்போது தீர்வு மீச்சிறுமாக இருந்த போதிலும் அதாவது, $z_j - c_j \leq 0$ என்று இருந்தாலும், செய்தக்கதாக இருக்காது. அதாவது $\bar{x}_j \geq 0$ என்பது சில j-க்களுக்கு உண்மையாக இராது.

தகுந்த அளவு λ பெரிதாகும்போது முதன் முதலில் குறையாக மாறும் மாறி $\bar{x}_l$ என்க. $\bar{x}_l = u_l + \theta v_l$ என்பதால், $\theta_2 = -\dfrac{u_l}{v_l}$, $(v_l < 0)$ ஆகும். இப்போது $\theta > \theta_2$ என்ற நிலையில் புது மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வைக்காண விழைகிறோம். வலப்புறத்து மூலகங்களைக் குறையல்லாமலும் $z_j - c_j$-க்களை மிகையல்லாமலும் செய்ய வல்ல முறையில் உட்புகுத்துவதற்கு ஒரு வெக்டரையும், நீக்குவதற்கு ஒரு வெக்டரையும் காண வேண்டும்.

$\theta_2 = -\dfrac{u_l}{v_l}$ $(v_l < 0)$ என்றால் P_l என்னும் வெக்டரை அடிப்படையிலிருந்து நீக்குகிறோம். இதன் இடத்தில் P_k என்ற வெக்டரைப் பின்வருமாறு கண்டு உட்புகுத்துகிறோம். அனைத்து j-க்கும் $x_{lj} > 0$ என்பது உண்மையல்ல என்றால் அதாவது ஒரு j-க்காவது $x_{lj} < 0$ என்பது உண்மை என்றால்

$$\frac{z_k - c_k}{x_{lk}} = \underset{x_{lj} < 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \; \frac{z_j - c_j}{x_{lj}}$$

என்று வரையறுத்து k-ஐக் காண்கிறோம். λ-ன் ஒரு மதிப்பிற்காவது மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கும் ஒரு புதிய தீர்வு கிடைக்கும் என்றும், $\lambda'_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda'_2$ என்பது புது அடிப்படை மீச்சிறுமத்தைக் கொடுக்கும் அனைத்து λ மதிப்புகளின் கணம் என்றால் $\lambda_1' = \lambda_{2l}$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

$$\begin{aligned}\bar{x}'_i &= u_i' + \lambda v_i' \\ &= u_i + \lambda v_i - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} \quad (u_l + \lambda v_l), \; i \neq l \\ \bar{x}_l' &= u_l' + \lambda v_l' \\ &= \frac{u_l + \lambda v_l}{x_{lk}}\end{aligned}$$

என்றால்

$$\overline{X'} = (\bar{x}_1', \bar{x}_2' \ldots, \bar{x}_n')$$

என்பது அடிப்படை மாற்றத்தால் கிடைக்கும் புதிய தீர்வாகும். $\lambda = \lambda_2 = -u_l/v_l$ என்னும்போது இது நிச்சயமாக செய்தக்க தீர்வே. தவிரவும் $\overline{X_i'}$ வேறு λ மதிப்பிற்கும் செய்தக்கது என்றால்

$\lambda > \lambda_2$ ஆகவேண்டும். ஏனெனில், $x_{lk} < 0$, $v_l < 0$ $\dfrac{u_l + \lambda v_l}{x_{lk}} > 0$

என்பதால் $\lambda > -\dfrac{u_l}{v_k} = \lambda_2$

புதிய தீர்விற்கான $z_j - c_j$-ஐ $(z_j - c_j)'$ எனக் குறித்தால்

$$(z_j - c_j)' = z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c_k)$$

$z_j - c_j \leqslant 0$ என்றுள்ள (அனைத்து j-க்கும்), $x_{lk} < 0$ என்பதால் $x_{lj} > 0$ என்றுள்ள அனைத்து j-க்கும். $(z_j - c_j)'$ மிகையல்லா எண்களாகும். மேலும் $x_{lj} < 0$ என்றுள்ள அனைத்து j-க்கும் கொள்கைப்படி,

$$\frac{z_j - c_j}{x_{lj}} > \frac{z_k - c_k}{x_{lk}}$$

என்பதால்,

$$z_j - c_j - \frac{x_{lj}(z_k - c_k)}{x_{lk}} = (z_j - c_j)' \leqslant 0$$

என்று கிடைக்கிறது. எனவே, X' மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு ஆகும்.

மேற்கண்ட செயல்முறையைத் திரும்பத் திரும்ப பயன்படுத்தி §6·2–ல் கண்டது போல் λ-ன் இடைவெளியை விரிவுபடுத்திக் கொண்டுபோய் $\lambda = \nu$ என்னும்போது மீச்சிறு செய்தக்க தீர்வு காணலாம் என்று நிரூபிக்கலாம்.

எல்லா x_{ij}–களும் குறையல்லா எண்கள் என்றால் $\lambda > \lambda_2$-க்கு செய்தக்க தீர்வுகள் கிடையா என்றும் எளிதில் நிரூபிக்கலாம். இப்பொழுது l-வது அடிப்படை மாறியை குறையல்லா எண்ணாக மாற்ற முடியாது.

6·4 எடுத்துக்காட்டுகள் :

§ § 6·2, 6·3 - களில் விவரித்த முறைகளை விளக்கும் வகையில் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு (1): θ-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (அதாவது $(-\infty < \eta \leqslant \theta \leqslant \zeta < +\infty)$ பின்வரும் துணையலகு குறிக்கோள் - சார்பு - நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்க.

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 7\\
-2x_2 + 4x_3 + x_4 \quad\quad\quad\quad &= 12\\
-4x_2 + 3x_3 \quad\quad + 8x_5 + x_6 &= 10\\
x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6 &
\end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$2\theta x_1 + (1-\theta) x_2 - 3x_3 + \theta x_4 + 2x_5 - 3\theta x_6$$

என்பதன் மீச்சிறு மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு : கட்டுப்பாடுகளிலேயே x_1, x_4, x_6 என்ற மாறிகள் ஓரலகு அணியை அமைப்பதால் $(P_1\ P_4\ P_6)$-ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு அட்டவணையை அமைக்கிறோம். இந்த நிலையில் தீர்வு $x_1 = 7, x_4 = 12, x_6 = 10, x_2 = x_3 = x_5 = 0$ ஆகும். குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு -4θ ஆகும். இந்த நிலையை அட்டவணை (6·1)-ல் படி-1 என்று குறித்துக்கொள்ளோம். $z_j - c_j$ - க்களை இரண்டு நிரைகளில் (4, 5, - வது நிரைகள்) குறித்துள்ளோம். θ- ன் கெழு 5-வது நிரையிலும், θ இல்லாத எண் 4-வது நிரையிலும் பிரித்து எழுதப்பட்டுள்ளன.

$\theta = \eta$-க்கு முடிவுள்ள தீர்வு உள்ளதா என்று நாம் காண விரும்புவதால் நிரம்பவும் குறையான θ கெழு பெற்றுள்ளவெக்டரை அடிப்படையில் உட்புகுத்த வேண்டும். இந்த வெக்டர் P_5 என்று இருப்பதால் $x_{i5} > 0$-க்கு $\dfrac{x_{io}}{x_{i5}}$ - களைக் கண்டு எந்த i-க்கு இத்தகவு மீச்சிறு மதிப்பை ஏற்கிறது என்பதைக்கண்டு அந்த நிரையின் அடிப்படை வெக்டரை அடிப்படையிலிருந்து நீக்குகிறோம். அட்டவணையிலிருந்து P_6-ஐ நீக்கவேண்டுமென்று

அட்டவணை (6.1)

				2θ	$1-\theta$	-3	θ	2	-3θ	படி-1
i	c	அடிப்படை	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	2θ	P_1	7	1	3	-1	0	2	0	
2	θ	P_4	12	0	-2	4	1	0	0	
3	-3θ	P_6	10	0	-4	3	0	[8]	1	→
4			0	0	-1	3	0	-2	0	
5			-4	0	17	-7	0	-20	0	
								↑		

அட்டவணை (6.1) – தொடர்ச்சி

1	2θ	P_1	$\frac{36}{8}$	1	4	$-\frac{14}{8}$	0	0	$-\frac{2}{8}$	படி–2
2	θ	P_4	12	0	–2	**[4]**	1	0	0	⟶
3	2	P_5	$\frac{10}{8}$	0	$-\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	1	$\frac{1}{8}$	
4			$\frac{5}{2}$	0	–2	$\frac{15}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	
5			21	0	7	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	
						↑				

1	2θ	P_1	$\frac{39}{4}$	1	$\frac{25}{8}$	0	$\frac{7}{16}$	0	$\frac{1}{4}$	படி–3
2	–3	P_3	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	
3	2	P_5	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{5}{16}$	0	$-\frac{3}{32}$	1	**[$\frac{1}{8}$]**	⟶
4			$-\frac{35}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{5}{16}$	0	$\frac{1}{4}$	
5			$\frac{39}{2}$	0	$\frac{29}{4}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{2}$	
									↑	

				2θ	$1-\theta$	–3	θ	2	-3θ	படி–4
i	c		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	2θ	P_1	10	1	**[$\frac{5}{2}$]**	0	$\frac{1}{4}$	2	0	⟶
2	–3	P_3	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	
3	-3θ	P_6	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	8	1	
4			–9	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	–2	0	
5			17	0	$\frac{27}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	–20	0	
					↑					

அட்டவணை (6·1) – தொடர்ச்சி

1	$1-\theta$	P_2	4	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	0	படி–5
2	-3	P_3	5	$\frac{1}{5}$	0	1	$\boxed{\frac{3}{10}}$	$\frac{2}{5}$	0	→
3	-3θ	P_6	11	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	10	1	
4			-11	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{12}{5}$	0	
5			-37	$-\frac{27}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{154}{5}$	0	
							↑			

1	$1-\theta$	P_2	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	படி–6
2	θ	P_4	$\frac{50}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	
3	-3θ	P_6	$\frac{58}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{32}{3}$	1	
4			$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	
5			$-\frac{131}{3}$	$-\frac{17}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{94}{3}$	0	
							↑			

அறிகிறோம். (3, 5) கட்டத்தின் உறுப்பு மைய உறுப்பாகும். இதை மைய உறுப்பாகக்கொண்டு அடிப்படை மாற்றத்தைச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி செய்து அட்டவணை (6.1) - ன் இரண்டாம் படியைப் பெறுகிறோம்.

படி 2-ல் $z_j - c_j$-க்களில் θ-ன் கெழுக்கள் அதாவது β_j-க்கள் யாவும் குறையல்லா எண்கள். எனவே § 6·2-ன் குறியீட்டில்

$$\theta_1 = -\infty, \theta_2 = \underset{\beta_j > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)$$

$$= \text{மீச்சிறுமம்} \left(+\frac{2}{7}, -\frac{15}{2}, -\frac{1}{10} \right) = -\frac{15}{2}.$$

எனவே, கொடுத்துள்ள பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு $\theta \leqslant -\frac{15}{2}$ என்றுள்ள அனைத்து θ-க்களுக்கும் காணமுடியும் என்று அறிகிறோம். மேலும் மீச்சிறு மதிப்பு$=z_0=\frac{5}{2}+21\,\theta$ ஆகும்.

இனி θ-ன் உயர்மதிப்பாகிய $-\frac{15}{2}$-ஐ மேலும்கூட்ட முடியுமா என்று பார்க்க வேண்டும். $\theta_2=-\frac{\alpha_3}{\beta_3}=-\frac{15}{2}$ என்பதால் P_3-யை அடிப்படையில் உட்புகுத்துகிறோம். மூன்றுவது நிரலின் மூலகங்கள் எல்லாமே $\leqslant 0$ என்று இல்லை என்பதால் அடிப்படையிலிருந்து நீக்குவதற்கு ஒரு வெக்டரை சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படிகாண முடியும். x_{io}/x_{i3}, $(x_{i3}>0)$ என்பவற்றுள் x_{2o}/x_{23} என்பதே மிகச்சிறியது என்பதால் இரண்டாம் நிரையிலுள்ள அடிப்படை வெக்டர் P_4 நீக்கப்படவேண்டும். கட்டம் (2, 3)-ல் உள்ள எண்ணை மைய உறுப்பாகக்கொண்டு அட்டவணை (6.1)-ன் படி-2-இலிருந்து படி – 3 - ஐப் பெறுகிறோம்.

இரண்டாம் படியில் செய்ததுபோலவே மூன்றும் படியிலும் செயல்படுகிறோம். $\theta=\theta_2$ என்னும்போது $z_j-c_j=\alpha_j+\theta\beta_j\leqslant 0$, $j=1,2,\ldots,n$ என்று ஆகிறது. எனவே, மீச்சிறுமத் தீர்வு கிடைக்கிறது. § 6.2 – ன் முறைப்படி

$$\theta_1'=\underset{\beta_j<0}{\text{மீப்பெறுமம்}}\left\{-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right\}=-\frac{15}{2}$$

$$\theta_2'=\underset{\beta_j>0}{\text{மீச்சிறுமம்}}\left\{-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right\}=-\frac{1}{10}$$

என்றும் $\theta_1'\leqslant\theta\leqslant\theta_2'$-க்கு மீச்சிறுமத் தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன என்றும் அறிகிறோம். $\theta_1'=\theta_2$ என்பதைக் கவனிக்கவும். எனவே θ-ன் மதிப்புகளை $-\frac{1}{10}$ வரை உயர்த்தலாம் என்று அறிகிறோம்.

இதையும்விட அதிகரிக்க நினைக்கும்போது அடிப்படையில் P_6 என்னும் வெக்டரை உட்புகுத்த வேண்டும். சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி நீக்கப்பட வேண்டிய வெக்டர் P_5 என்று அறிகிறோம். மாற்றத்திற்கான மைய உறுப்பு (3, 6) கட்டத்தில் இருக்கும் மூலகம் ஆகும்.

இந்த அடிப்படை மாற்றத்தின் விளைவாகக் கிடைப்பதே அட்டவணை (6·1)-ன் நான்காம் படியாகும்.

நான்காம் படியில் θ-ன் மதிப்புகள் $\theta_1' = -\frac{1}{10}$, $\theta_2'' = -\frac{1}{27}$ இரண்டிற்கும் இடையில் உள்ளவரை மீச்சிறு தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன என்பது தெளிவாகிறது. இனி முன்போலவே, P_2-வை உட்புகுத்தி P_1-ஐ நீக்கி ஐந்தாம்படியைப் பெறுகிறோம். இப்பொழுது θ-ன் மதிப்புகள் $\theta_1''' = -\frac{1}{27}$, $\theta_2''' = 2$ என்ற எண்களுக்கு இடைப்பட்டிருக்கும் வரை மீச்சிறு தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. மேலும் θ-ன் மதிப்பை உயர்த்த அடிப்படையில் P_4-ஐ உட்புகுத்தி P_8-ஐ நீக்குகிறோம். அட்டவணை (6.1)-ன் ஆறும்படி இந்த நிலையைக் குறிக்கிறது.

இப்பொழுது 5-ம் நிரையின் மூலகங்களான $z_j - c_j$-ல் θ-ன் கெழுக்கள் யாவும் மிகையல்லா எண்கள். $\theta_2'''' = +\infty$ ஆகும். ஆகவே § 6.2.-நிலை (அ)-ல் கூறியதுபோல் பிரச்சினையை மேலும் தொடரத் தேவை இல்லை. θ-ன் எந்த மதிப்பிற்கும் பிரச்சினைக்கு மீச்சிறுதீர்வு காணமுடியும் என்று அறிகிறோம்.

பிரச்சினையின் பண்பு மதிப்புகள் முறையே, $-\frac{15}{2}$, $-\frac{1}{20}$ $-\frac{1}{27}$, 2, ஆகும் இம்மதிப்புகளுக்குச் சரியான பண்புத்தீர்வுகள் — 155, — 10·7, $-\frac{260}{27}$, — 85 என்பனவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு (2): தொடர்ந்து மூன்று மாதங்களில் 7, 10 8 அலகுகள் ஒரு சரக்கின் விற்பனைத் தேவைகளை அச்சரக்கைத் தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்று சமாளிக்க வேண்டியிருக்கிறது. தொழிலாளர் குழுஒன்று ஓரலகு சரக்கை ஒரு மாதத்தில் தயாரிக்க 15 ஆயிரம் ரூபாய் செலவாகிறது. மேலும் சில குழுக்களை வேலைக்கு அமர்த்திக்கொண்டு உபரியாக உற்பத்தி செய்யலாம். ஆனால் இந்தக் குழுக்களுக்கு ஆகும் செலவு திட்டவட்டமாக நமக்குத் தெரியாது. ஒரு குழுவுக்கு 0 ரூபாயிலிருந்து 45 ஆயிரம் ரூபாய் வரை ஆகக்கூடும் என்று வைத்துக்கொண்டு தீர்வின்தன்மையை

ஆராய்க. பணியில் இருக்கின்ற எவரையும் பணிநீக்கம் செய்வது நிறுவனத்தின் கொள்கைக்கு முரணுனது. அவர்களைப் பணி மாற்றம் செய்யலாம்; ஆனுல் அது இலாபகரமானதும் அல்ல; அதனுல் செலவும் குறைவதில்லை. இந்த வகையில் உழைப்பு வீணுவதைப் பொருட்படுத்தாமல் கணிதமாதிரியை அமைக்கவும். தொடக்கத்தில் 3 அலகுகள் சரக்கு உள்ளது என்றும், 5 குழுக்கள் வேலை செய்கின்றன என்றும் கொள்ளவும். தேவை ஏற்படுவதற்கு முன்னரே சரக்கை உற்பத்திசெய்து கிடங்கில் தேக்கிவைக்கலாம். ஆனுல் இதற்காக ஓரலகிற்கு ஒரு மாதத்திற்கு ஆகும் செலவு 7 ஆயிரம் ரூபாயாகும்.

தீர்வு: இக்கணக்கிற்கான கணித மாதிரியை ஒரு நேரிய நெறிப் படுத்தும் பிரச்சினையாக அமைக்கிறோம். மிகக் குறைந்த பூச்சிய மல்லாத கெழுக்கள் இருப்பதற்காகப் பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு அமைக்கிறோம்:

x_i = i-வது மாதத்தில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட சரக்கின் அளவு (கொடுக்கப்பட்ட அலகில்)

z_i = i-வது மாதத்து உயரிக் கொள்ளளவு (spare capacity)

t_i = i-வது மாதத்தில் பணியிலமர்த்தப்பட்டக் குழுக்கள்

s_i = iவது மாத இறுதியில் கிடங்கில் தேக்கிய சரக்கின் அளவு (கொடுக்கப்பட்ட அலகில்)

என்று எடுத்துக் கொண்டால் தொடக்கநிலை மதிப்புகள் தெரியு மாதலால் பின்வரும் இருவகைச் சமன்பாட்டுக் கட்டுப்பாடுகள் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

எந்த மாதத்திலும் உள்ள தொழிலாளர் குழுக்களின்எண்ணிக் கை முந்திய மாத இறுதியில் இருந்த எண்ணிக்கையுடன் நடப்பு மாதத்தில் பணிக்கு அமர்த்தப்பட்ட குழுக்களின் எண்ணிக்கை யைக் கூட்டியதற்குச் சமமாகும்.

எனவே,

$$x_1 + z_1 = 5 + t_1$$
$$x_2 + z_2 = x_1 + z_1 + t_2$$
$$x_3 + z_3 = x_2 + z_2 + t_3$$

மேலும் ஒரு மாத இறுதியில் தேக்கிய சரக்கின் அளவு முந்திய மாதத்தின் எஞ்சிய அளவுடன், நடப்புமாத உற்பத்தியைக் கூட்டி விற்பனைத் தேவையைக் கழித்ததாகும்.

எனவே,

$$s_1 = 3 + x_1 - 7$$
$$s_2 = s_1 + x_2 - 10$$
$$s_3 = s_2 + x_3 - 8$$

கூடுதல் தொழிலாளர்கள் குழுக்காக ஆகும் செலவு θ ஆயிரம் ரூபாய்கள் ஒரு குழுவுக்கு ஒரு மாதத்திற்கு என்று கொண்டால் செலவுச் சார்பு

$$15(x_1+z_1+x_2+z_2+x_3+z_3)+7(s_1+s_2+s_3)+\theta(t_1+t_2+t_3)$$

ஆயிரம் ரூபாய்கள் ஆகும். இச்சார்பின் மதிப்பு மீச்சிறுமமாக இருப்பதற்கான 0–க்கும் 45-க்கும் இடைப்பட்ட θ மதிப்புகளுக்கு வரம்புகள் காண வேண்டும்.

நமது பிரச்னையில் 12மாறிகளும் 6 கட்டுப்பாடுகளும் உள்ளன. செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்தித் தீர்வு காணக்கூடும் என்றுலும் நேரிடையாகவே முதனிலை செய்தக்க தீர்வைப் பின் வருமாறு காண்போம். $t_1, t_2, t_3, z_1, z_2, z_3$ ஆகிய ஆறையும் அடிப்படையல்லா மாறிகளாகவும் எஞ்சிய 6 மாறிகளையும் அடிப்படை மாறிகளாகவும் கொண்டால் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன:

$$x_1 = 5 + t_1 \qquad\qquad - z_1$$
$$x_2 = 5 + t_1 + t_2 \qquad\qquad - z_2$$
$$x_3 = 5 + t_1 + t_2 + t_3 \qquad\qquad - z_3$$
$$s_1 = 1 + t_1 \qquad - z_1$$
$$s_2 = -4 + 2t_1 + t_2 - z_1 - z_2$$
$$s_3 = -7 + 3t_1 + 2t_2 + t_3 - z_1 - z_2 - z_3$$

மேலும் குறிக்கோள் சார்பு

$$x_0 = 155 + (87+\theta)t_1 + (51+\theta)t_2 + (22+\theta)t_3 - 21z_1 - 14z_2 - 7z_3$$

இந்த அடிப்படை மாறிகளுக்கு செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கவில்லை. அடிப்படையல்லா மாறிகளை பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்தால் x_1, x_2, x_3, s_1 என்ற அடிப்டை மாறிகள் மிகை மதிப்புகளை ஏற்கின்றன-ஆனுல் s_2, s_3 இரண்டும் குறையாக உள்ளன. t_1-ன் மதிப்பை பூச்சியத்தித்திலிருந்து உயர்த்தும் போது செய்தகாதன்மை விரைவாகக் குறையும் என்பதால் t_1-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும் அதிக செய்தகா தன்மை பெற்ற s_3-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் மாற்றுகிறேம். அட்டவணை (6.2)-ல் புதிய சமன்பாடுகளை

மாறிகளை இடதுபுறம் வருமாறு எழுதிக் காட்டியுள்ளோம். இச் சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் 6×6 ஓரலகு அணியை அமைக் கின்றன. வலதுபுறத்து மூலகங்கள் யாவும் மிகைஎண்கள். எனவே அட்டவணை(6·2)-ல் காட்டியவாறு அடிப்படையாக P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7 என்ற வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டால் செய்தக்க தீர்வு பிரச்சினைக்குக் கிடைக்கிறது. எனவே. இப்பொழுது சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தொடங்க முடியும். அட்டவணை (6·2)-ல் கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாடுகளையே அட்டவணை (6.3)-ல் சிம்ப்ளக்ஸ் முறை யின் முதனிலை அட்டவணையாகக் காட்டியுள்ளோம். இதில் குறிக் கோள் சார்பை நாம் முதலில் எடுத்துக்கொண்ட அமைப்பிலேயே எழுதியிருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

கூடுதலான குழுக்களைப் பணியில் அமர்த்திக் கொள்வதால் செலவு ஏதும் இல்லை என்று கொள்வோம்; அதாவது $\theta=0$ என் போம். அட்டவணை(6.3)–ன் 7–வது நிரையிலிருந்து P_8 அல்லது P_9–ஐ அடிப்படை வெக்டராக மாற்றினால் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்புக் குறைவுறும் என்று அறிகிறோம். நாம் P_8-ஐ உட்புகுத்து வோம். வழக்கமான சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்படவேண்டிய வெக்டர் P_5 என்று தீர்மானிக்கலாம். இந்த அடிப்படை மாற்றத்தின் விளைவை அட்டவணை (6·4)–ல் கொடுத் துள்ளோம்.

அட்டவணை (6.4)-ல் 7–வது நிரை மிகையல்லா மூலகங் களைப் பெற்றிருப்பதால் இந்தத் தீர்வு குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பை மீச்சிறுமப்படுத்தும் ($\theta=0$ என்னும் போது). 8-வது நிரையில் ஒரேவொரு மூலகம் தான் மிகையாக உள்ளது.

எனவே § 6.2-ன் குறியீட்டில் $\theta_2 = \underset{\beta_j > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(-\dfrac{\alpha_j}{\beta_j} \right) = 21$

ஆகும். ஆகையால் $\theta = 21$ என்ற நிலைவரையில் நமது பிரச்சினைக்கு மீச்சிறு தீர்வு உண்டு என்று அறிகிறோம்.

அடுத்து, θ-ன் மதிப்பை மேலும் உயர்த்த முடியுமா என்று பார்க்கலாம். P_5-ஐ அடிப்படையில் புகுத்துகிறோம். ($\theta_2 = -\dfrac{\alpha_5}{\beta_5}$ என்பதைக் கவனிக்கவும்). அடிப்படையிலிருந்து நீங்கும் வெக்டர் P_8 ஆகும். எனவே தாம் திரும்பவும் அட்டவணை (6.3)-க்கே வருகிறோம். β_j-க்கான நிரை மிகையல்லா எண்

அட்டவணை (6·2)

P_1 x_1	P_2 x_2	P_3 x_3	P_4 s_1	P_5 s_2	P_6 s_3	P_7 t_1	P_8 t_2	P_9 t_3	P_{10} z_1	P_{11} z_2	P_{12} z_3	P_0
x_1	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 0$	$-\frac{s_3}{3}$	$+\ 0$	$+\frac{2t_2}{3}$	$+\frac{t_3}{3}$	$+\frac{2z_1}{3}$	$-\frac{z_2}{3}$	$-\frac{z_3}{3}$	$=\frac{22}{3}$
0	$+\ x_2$	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 0$	$-\frac{s_3}{3}$	$+\ 0$	$-\frac{t_2}{3}$	$+\frac{2t_3}{3}$	$-\frac{z_1}{3}$	$+\frac{2z_2}{3}$	$-\frac{z_3}{3}$	$=\frac{22}{3}$
0	$+\ 0$	$+\ x_3$	$+\ 0$	$+\ 0$	$-\frac{s_3}{3}$	$+\ 0$	$-\frac{t_2}{3}$	$-\frac{2t_3}{3}$	$-\frac{z_1}{3}$	$-\frac{z_2}{3}$	$+\frac{2z_3}{3}$	$=\frac{22}{3}$
0	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ s_1$	$+\ 0$	$-\frac{s_3}{3}$	$+\ 0$	$+\frac{2t_2}{3}$	$+\frac{t_3}{3}$	$+\frac{2z_1}{3}$	$-\frac{z_2}{3}$	$-\frac{z_3}{3}$	$=\frac{10}{3}$
0	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ s_2$	$-\frac{2s_3}{3}$	$+\ 0$	$+\frac{t_2}{3}$	$+\frac{2t_3}{3}$	$+\frac{z_1}{3}$	$+\frac{z_2}{3}$	$-\frac{2z_3}{3}$	$=\frac{2}{3}$
0	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 0$	$-\frac{s_3}{3}$	$+\ t_1$	$+\frac{2t_2}{3}$	$+\frac{t_3}{3}$	$-\frac{z_1}{3}$	$-\frac{z_2}{3}$	$-\frac{z_3}{3}$	$=\frac{7}{3}$

அட்டவணை (6·3)

i				15	15	15	7	7	7	θ	θ	θ	15	15	15	
	c	அடிப்படை	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	
1	15	P_1	$\frac{22}{3}$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
2	15	P_2	$\frac{22}{3}$	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
3	15	P_3	$\frac{22}{3}$	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
4	7	P_4	$\frac{10}{3}$	0	0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
5	7	P_5	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	→
6	θ	P_7	$\frac{7}{3}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
7		α_j	358	0	0	0	0	0	−29	0	7	7	−8	−15	−22	
8		β_j	$\frac{7}{3}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
				x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	t_1	↑ t_2	t_3	z_1	z_2	z_3	

அட்டவணை (6·4)

i		அடிப்படை		15	15	15	7	7	7	θ	θ	θ	15	15	15
	c		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
1	15	P_1	6	1	0	0	0	–2	1	0	0	–1	0	–1	1
2	15	P_2	8	0	1	0	0	1	–1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	–1
3	15	P_3	8	0	0	1	0	1	–1	0	0	0	0	0	0
4	7	P_4	2	0	0	0	1	–2	1	0	0	–1	0	–1	–1
5	θ	P_8	2	0	0	0	0	**[3]**	–2	0	1	2	1	1	–2 →
6	θ	P_7	1	0	0	0	0	–2	1	1	0	–1	–1	–1	1
7		α_j	344	0	0	0	0	–21	–15	0	0	–2	–5	–22	–22
8		β_j	3	0	0	0	0	1	–1	0	0	0	0	0	–1
				x_1	x_2	x_3	s_1	s_2 ↑	s_3	t_1	t_2	t_3	z_1	z_2	z_3

களையே பெற்றிருப்பதால் θ-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பு $+\infty$ என்றாகிறது; அதாவது $\theta_2' = \infty$. மேலும்

$$\theta_1' = \underset{\beta_j < 0}{\text{மீப்பெருமம்}} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)$$

$$= \text{மீப்பெருமம்} \left\{ -87, 21, \frac{21}{2}, -24, -45, -66 \right\}$$

$$= 21 = \theta_2$$

என்பதையும் கவனிக்கவும். எனவே $\theta > 21$ என்றவாறுள்ள எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இந்நிலையில் மீச்சிறு தீர்வு உண்டு என்று அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு (3) : எடுத்துக்காட்டு (2)-ல் ஒவ்வொரு கூடுதல் குழுவுக்கும் ஒரு மாதத்திற்கு ஆகும் செலவு 20 ஆயிரம் ரூபாய் என்று எடுத்துக் கொள்வோம். மூன்றாவது மாதத்தின் விற்பனைத் தேவைக்கான முன் கணிப்பு (forecast) பிழையானது என்றால், இத்தேவைக்கான முன் கணிப்புக் குறையும்போது இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு எங்ஙனம் பாதிக்கப்படுகிறது என்பதை ஆராய்க.

தீர்வு : சென்ற எடுத்துக் காட்டின் குறியீட்டில் கடைசி மாதத்திற்கான தேவை λ அலகுகள் குறைந்தால் s_3-க்கான சமன்பாடு மட்டுமே பாதிக்கப்படுகிறது. அது இப்போது

$$s_3 = s_2 + x_3 - 8 + \lambda$$

என்று மாறுகிறது. s_3-ம், λ-ம் இந்த ஒரு கட்டுப்பாட்டுச் சமன் பாட்டிலேயே வருவதால் சென்ற எடுத்துக்காட்டில் s_3க்-குப் பதிலாக $s_3 - \lambda$ என்று எழுதுவது போதுமானது. ஆனால் குறிக்கோள் சார்புக்கான கோவையில் s_3-ஐ மாற்ற வேண்டியது இல்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

கூடுதல் குழுவுக்கான செலவு மாதம் 20 ஆயிரம் ரூபாய் என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாலும் அட்டவணை (6.4) $\theta = 21$ வரை மீச்சிறு தீர்வைக் கொடுக்கவல்லது என்பதாலும் இந்த அட்டவணையில் $\theta = 20$ என்றும் s_3 ஐ $s_3 - \lambda$ என்றும் எழுதி அட்டவணை (6.5)-ஐப் பெறுகிறோம்.

அட்டவணை (6.5)-ன் 7-வது நிரை $z_j - c_j$-க்களின் மதிப்புகளைத் தருகிறது. அனைத்து j-க்கும் $z_j - c_j < 0$ என்பதால் நமது தீர்வு மீச்சிறு தீர்வாகும். ஆனால் P_0 நிரலிலிருந்து

அட்டவணை (6·5)

i	c	அடிப்படை	P_0	15	15	15	7	7	7	20	20	20	15	15	15
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
1	15	P_1	$6-\lambda$	1	0	0	0	-2	1	0	0	-1	0	-1	1
2	15	P_2	$8+\lambda$	0	1	0	0	1	-1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	-1
3	15	P_3	$8+\lambda$	0	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
4	7	P_4	$2-\lambda$	0	0	0	1	-2	1	0	0	-1	0	-1	-1
5	20	P_8	$2+2\lambda$	0	0	0	0	3	-2	0	1	2	1	1	-2
6	20	P_7	$1-\lambda$	0	0	0	0	[-2]	1	1	0	-1	-1	-1	1 →
7			$404+28\lambda$	0	0	0	0	-1	-35	0	0	-2	-5	-22	-42
				x_1	x_2	x_3	s_1	↑ s_2	s_3	t_1	t_2	t_3	z_1	z_2	z_3

அட்டவணை (6.6)

i	c	அடிப்படை	P_0	15 / P_1	15 / P_2	15 / P_3	7 / P_4	7 / P_5	7 / P_6	20 / P_7	20 / P_8	20 / P_9	15 / P_{10}	15 / P_{11}	15 / P_{12}
1	15	P_1	5	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0
2	15	P_2	$\frac{15}{2}+\frac{\lambda}{2}$	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3	15	P_3	$\frac{15}{2}+\frac{\lambda}{2}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
4	7	P_4	1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	-2
5	20	P_8	$\frac{7}{2}+\frac{\lambda}{2}$	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
6	7	P_5	$\frac{-1}{2}+\frac{\lambda}{2}$	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
7			$\frac{807+57\lambda}{2}$	0	0	0	0	0	$-\frac{71}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{43}{2}$	$-\frac{85}{2}$
				x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	t_1	t_2	t_3	z_1	z_2	z_3

தீர்வு செய்தக்கதாக இருப்பதற்கு λ-ன் மதிப்புகள் — 1-க்கும் 1-க்கும் இடையில்தான் இருக்கவேண்டும் என்று அறிகிறோம். P_0-ன் மூலகங்களை $u_i + \lambda v_i$, i = 1, 2, ..., 6 என்று எழுதினால்

$$\lambda_2 = \begin{cases} \underset{v_i < 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \left(\dfrac{-u_i}{v_i}\right). \\ +\infty, \text{ அனைத்து } i\text{-க்கும் } v_i > 0 \text{ என்றால்} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \begin{cases} \underset{v_i > 0}{\text{மீப்பெருமம்}} \left(\dfrac{-u_i}{v_i}\right). \\ -\infty, \text{ அனைத்து } i\text{-க்கும் } v_i < 0 \text{ என்றால்} \end{cases}$$

என்பன λ-ன் மேல் கீழ் வரம்புகள் என்று § 6.3-ல் பார்த்தோம். அட்டவணை (6.5)-இலிருந்து $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = -1$ என்று எளிதில் அறியலாம். இதை, நேரிடையாக $\lambda > 1$ என்னும் போது P_7 (t_1)-ம், $\lambda < -1$ என்னும் போது P_8 (t_2)-ம் குறையாக மாறுவதிலிருந்து அறியலாம். எனவே λ-ன் மதிப்பை 1-க்கும் மேலே உயர்த்தினால் தீர்வின் செய்தக்க தன்மை பாதிக்கப் படுகிறது.

எனவே, அடிப்படையிலிருந்து P_7-ஐ நீக்கிவிட்டு அதன் இடத்தில் வேறு வெக்டரை உட்புகுத்த வேண்டும். 6-வது நிரையின் குறை மூலகங்களால் ஒத்த $z_j - c_j$-க்களை வகுத்துக் கிடைக்கும் விகிதங்களுள் மீச்சிறியது எந்த நிரலைச் சேர்ந்தது என்று பார்த்து அதற்கான வெக்டர் P_5-ஐ அடிப்படையில் உட்புகுத்துகிறோம். சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக்கான நீக்க வாய்பாடுகள் அட்டவணை (6.6)-ஐத் தருகின்றன

முன் போலவே இந்த அட்டவணைக்கான λ-ன் கீழ், மேல் வரம்புகள் λ_1', λ_2' என்றால்

$$\lambda_1' = 1, \ \lambda_2' = \infty$$

என்று கிடைக்கின்றன. ஆகவே, λ-ன் எல்லா மதிப்பிற்கும் மீச்சிறு தீர்வுகள் உள்ளன. கடைசி மாதத்திற்கான தேவைக்கான் கணிப்பு 8 என்று உள்ளதால் $\lambda > 8$ என்னும் போது பிரச்சினையைத் தொடருவதில் பொருள் இல்லை.

பயிற்சிகள் பாடம் 6.

(6.1)
$$3x_1 - x_2 > 5$$
$$2x_1 - x_2 < 3$$
$$x_1 > 0$$
$$x_2 > 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$\lambda x_1 - x_2$$

என்னும் சார்பிற்கு மீச்சிறுத் தீர்வுகள் $-2 < \lambda < 3$ என்ற மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே காணமுடியும் என்றும், $\lambda = 3$ என்னும் போது பல தீர்வுகள் உள்ளன என்றும் $\lambda > 3$, $\lambda < -2$ என்றால் வரம்புடையத் தீர்வுகள் காண முடியாது என்றும் நிறுவுக. (காஸ்)

(6.2)
$$x_1 - x_2 < 2$$
$$x_1 + x_2 < 6$$
$$x_1 + 2x_2 < \alpha$$
$$x_1 > 0$$
$$x_2 > 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$2x_1 + x_2$ -ன்

மீப்பெரு மதிப்பைத் தரும் தீர்வுகளை $0 < \alpha < 12$ என்னும் போது காணமுடியும் என நிறுவுக. மேலும் $0 < \alpha < 2$, $2 < \alpha < 8$, $8 < \alpha < 12$ என்ற இடைவெளிகளில் மீப்பெரு மதிப்புகள் முறையே 2α, 2, 10 என்றும் நிரூபிக்கவும். (ஃப்ரோடெர்க்)

(6.3) எடுத்துக்காட்டு (2)-ல் (§ 6.4) ஒவ்வொரு கூடுதல் குழுவுக்கும் ஒரு மாதத்திற்கு ஆகும் செலவு 20,000 ரூபாய் என்று எடுத்துக் கொள்க. முதல் மாதத்தின் விற்பனைத் தேவைக்கான முன்கணிப்புப் பிழையானது என்றால், இத்தேவைக்கான முன் கணிப்புக் குறையும் போது இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு எங்ஙனம் பாதிக்கப்படுகிறது என்பதை ஆராய்க.

(6.4) பயிற்சி (6.1)-ல் λ-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு படம் வரைந்து தீர்வுகள் எவ்வாறு மாறுதல் அடைகின்றன என்பதை விளக்குக.

(6.5) எடுத்துக்காட்டுகள் (2), (3) (§ 6.4) – இரண்டிற்கும் தீர்வுகளின் அடிப்படையில் பொருளாதார நோக்கில் விளக்கம் தர முயலுக.

7. திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை

(Revised Simplex Method)

7.1. முன்னுரை :

சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் கணக்கீடுகளைப்பற்றிச் சிறிது ஆராய்வோம். [அட்டவணை (3·1) – ஐப் பார்க்கவும்]. பிரச்சினை n மாறிகளில் m சமன்பாட்டுக் கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டிருந்தால், குறிக்கோள் சார்பு, வலது புறங்கள் ஆகியவற்றையும் சேர்த்து மொத்தம் $(m+1)$ $(n-m+1)$கெழுக்களை(coefficients) $(m+1)$ நிரைகளாகவும், $(n-m+1)$ நிரல்களாகவும் அமைத்துக் கணக்கீடுகள் செய்கிறோம். ஒவ்வொரு முறை அடிப்படை மாற்றம் செய்யும் போதும் இவற்றுள் ஒரு சில கெழுக்களே பயன்படுத்தப்பட்டாலும், எல்லாக் கெழுக்களுக்கும் மாற்று வாய்பாடுகள் மூலம் புதிய மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக் குறித்துக் கொள்கிறோம். விளக்கமாகக் கூறுமிடத்து, புதிய அடிப்படையை அமைக்கப் பின்வரும் முறையில், குறிப்பிட்ட சில கெழுக்களே தேவைப்படுகின்றன:

(அ) குறிக்கோள் சார்பின் அனைத்துக் கெழுக்கள். (மீச்சிறுமப் பிரச்சினை என்றால் நிரம்பவும் குறையான செலவுக் கெழுவைப் பெற்ற மாறியுள்ள நிரலை அடிப்படை மாற்றத்திற்கான மைய நிரலாக (pivotal column) தேர்ந்தெடுக்கிறோம் என்பதை நினைவு கூர்க.)

(ஆ) மைய நிரையைத் தேர்ந்தெடுக்க மைய நிரலின் அனைத்துக்கெழுக்களும், வலதுபுறத்திலுள்ள கெழுக்களும்.

(இ) குறிக்கோள் சார்பின் மாறிய மதிப்பு காண மையநிரையின் மற்ற கெழுக்கள்.

பின்னர், வேறு அடிப்படை மாற்றம் செய்யும்போது தேவைப் படலாம் என்பதற்காக மற்ற நிரல்களின் மூலகங்களையும் புதிய அடிப்படைக்கேற்ப மாற்றி எழுதுகின்றோம். இனி ஒரு நிலையில் ஒருக்கால் தேவைப்படும் என்று எண்ணி அனைத்து தகவல்களையும் ஒவ்வொரு அடிப்படை மாற்றத்தின் போதும் கணக்கிடுவதை விட உடனடியாயத் தேவையான மூலகங்களை மட்டும் கணக்கிட்டு

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தொடர்ந்து செயல்படுத்தக் கூடுமானால் நம் வேலை பெரிதும் எளிதாக்கப்படலாம். இந்த நோக்கத்தோடு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் சில மாறுதல்களைச் செய்து கணக்கீடுகளைச் செய்வதையே திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை என்கிறோம். அடிப்படையின் தன் மாற்று அணி பயன்படுத்தப்படுவதால் இந்தக் கணக்கீட்டு முறையைத் தன் மாற்று அணி முறை (Inverse matrix method) என்றும் கூறுகிறோம். இதன் சற்றே மாறிய அமைப்பில் எளிய அணிகளின் (elementary matrices) பெருக்கலாக அடிப் படை எழுதப்படுவதால் இந்த மாறிய அமைப்பைத் தன் மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பு (product form of the inverse) என்று கூறுவதுண்டு.

அடுத்து வரும் பகுதிகளில் இவ்விரு முறைகளைப் பற்றியும் விவரிக்கின்றோம். சிறு பிரச்சினைகளின் தீர்வு காணும்போது சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறையே எளிதாகத் தோன்றக் கூடும். ஆனால் m, n என்பன மிகப்பெரிய எண்களாக இருக்கும்போது கம்ப்யூட்டரைப் பயன்படுத்திக் கணக்கீடுகள் செய்யும் நிலையில் தன் மாற்று அணி, அதன் பெருக்கல் அமைப்பு முறைகளின் சிறப்பை நன்கு உணரலாம்.

7.2. தன்மாற்று அணி முறை :

நமது பிரச்சினை $AX = b, X > O$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க cX - ன் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்பது என்க. (§2·1 - ன் குறியீட்டில் பிரச்சினை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.) m பரிமாண வெக்டர்களுக்கான அடிப்படை

$$B = (P_1 \, P_2 \, \ldots \, P_m)$$

கொடுக்கப்பட்டால் P_j என்னும் எந்த m - பரிமாண வெக்டரையும் அடிப்படை வெக்டர்களின் நேரியச் சேர்க்கையாக

$$P_j = x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \ldots + x_{mj} P_m$$

என்று எழுதலாம் என்றும், இந்த அமைப்பில் உள்ள கெழுக்கள் $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}$ என்பன அமைக்கும் நிரல் வெக்டர் X_j – யை

$$X_j = B^{-1} P_j \tag{7·1}$$

என்ற வாய்பாட்டால் கணக்கிடலாம் என்றும் §1·5-ல் பார்த்தோம். அடிப்படை B - யை கெழுக்கள் அணி A - ன் முதல் m வெக்டர்கள் என்றும்

$$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0})$$

என்ற வெக்டர்

$$B X_0 = b$$
$$X_0 > O$$

என்றவாறு உள்ளது என்றும் கொண்டால்

$$X_0 = B^{-1} b \qquad (7{\cdot}2)$$

என்பது நாம் எடுத்துக் கொண்ட பிரச்சினைக்கு ஓர் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வாகும். §3·2 - ல் குறிப்பிட்டபடி [சமன்பாடு (3·11) - ஐப் பார்க்கவும்]

$$z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \dots + c_m x_{mj} \qquad (7{\cdot}3)$$

$j = 1, 2, \dots, n$ என்று எழுதுவோம்.

$c_0 = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ என்பது m-பரிமாண நிரைவெக்டர் என்றால் சமன்பாடு (7.3)-ஐ

$$z_j = c_0 \ X_j = c_0 \ B^{-1} P_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

என்று எழுதலாம். இதிலிருந்து, செய்தக்க அடிப்படை B-க்கு

$$\pi = c_0 \ B^{-1} = (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_m) \qquad (7.4)$$

என்ற m-பரிமாண நிரை வெக்டர் கொடுக்கப்பட்டால் z_j-க்களை கணக்கிடலாம் என்று அறியலாம். வெக்டர் π-ஐ மதிப்பிடும் (pricing) வெக்டர் அல்லது பெருக்கு (multiplier) வெக்டர் என்றும், அதன் மூலகங்கள் π_i-க்களை மதிப்பீட்டுப் பெருக்கிகள் அல்லது சிம்ப்ளக்ஸ் பெருக்கிகள் என்றும் வழங்குகிறோம். அடிப்படையில் உள்ள வெக்டர்களுக்கு $\pi P_j = c_0 B^{-1} P_j = c_j$ ஆகும். அடிப் படையில் இல்லாத வெக்டர்களுக்கு

$$z_j - c_j = \pi P_j - c_j$$ என்பவற்றைக் காணலாம்.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விளக்கத்திலிருந்து ஒரு செய்தக்க தீர்விலிருந்து வேறொரு செய்தக்க தீர்வு பெறத் தேவையான தகவல் களை செய்தக்க அடிப்படை B-ன் தன்மாற்றிலிருந்தும், பிரச்சினை யின் முதனிலை அமைப்பில் உள்ள A, b, c - க்களிலிருந்தும் கணக் கிட்டுப் பெறலாம் என்று அறிகிறோம்.

B, $\overline{B}$ என்பன அடுத்தடுத்த நிலைகளில் செய்தக்க அடிப் படைகள் என்றும் $\overline{B}$-ம் B-ம் l-வது நிரலில் மட்டுமே மாறுபட்டன என்றும் கொள்க. தெளிவாக,

$$B = (P_1 P_2 \dots P_l \dots P_m)$$

என்றும், இதில் P_l என்னும் l-வது நிரல் வெக்டருக்குப் பதில் P_k என்ற நிரல் வெக்டரை மாற்றி எழுதக் கிடைப்பது

$$\overline{B} = (P_1 P_2 \dots P_k \dots P_m)$$

என்றும் கொள்கிறோம். எனவே

$$B^{-1} B = B^{-1} \quad (P_1 P_2 \dots P_l \dots P_m) = I_m$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.5.)$$

என்றும், (7.1)-இலிருந்து

$$B^{-1}\ \overline{B} = B^{-1}(P_1\, P_2\ \ldots P_k \ldots\ P_m)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_{1k} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_{2k} & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & x_{lk} & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & x_{mk} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.6)$$

கிடைக்கின்றன. B^{-1}, $\overline{B}^{-1}$ என்ற அணிகளைச் சுருக்கமாக (b_{ij}), $(\overline{b}_{ij})$ என்று குறித்தால்

$$\left.\begin{aligned} \overline{b_{ij}} &= b_{ij} - \frac{b_{lj}}{x_{lk}}.\ \ x_{ik} \quad (i \neq l) \\ \overline{b_{lj}} &= b_{lj}/x_{lk} \end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

என்பன B, $\overline{B}$ - களின் தன்மாற்று அணியின் மூலகங்களுக்கான தொடர்புகளாகும். நீக்கவாய்பாடுகள் (7.7)-ன் உண்மையை நேரிடையாக $\overline{B}^{-1}\ \overline{B}$-ஐக் கணக்கிட்டு அறியலாம்.

அல்லது, (7.6)-ன் வலதுபுற அணியை I_l என்றால்

$$B^{-1}\overline{B} = I_l$$

$$\therefore\ \overline{B}^{-1} = I_l^{-1}\, B^{-1}$$

$$= E^l\, B^{-1}\ ,$$

$$E^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & -\dfrac{x_{1k}}{x_{lk}} & \ldots 0 \\ 0 & 1 & \ldots & -\dfrac{x_{2k}}{x_{lk}} & \ldots 0 \\ & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{x_{lk}} & \ldots 0 \\ & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & -\dfrac{x_{mk}}{x_{lk}} & \ldots 1 \end{pmatrix} \qquad (7 \cdot 8)$$

$$= I_l^{-1} \qquad \text{(சரிபார்க்கவும்)}$$

என்பதால் நீக்க வாய்பாடுகள் (7.7) கிடைக்கின்றன.

அதாவது, $\overline{B}^{-1}$-ன் $(i\,j)$-வது உறுப்பு $\overline{b_{ij}}$, $i \neq l$ என்னும் போது

$$\overline{b_{ij}} = \sum_{s=1}^{m} y_{is} \cdot b_{sj}$$

$$= 0 \cdot b_{1j} + 0 \cdot b_{2j} + \dots + 1 \cdot b_{ij} + 0 \cdot b_{i+1,j} + \dots$$

$$+ \left(-\frac{x_{ik}}{x_{lk}}\right) \cdot b_{lj} + 0 \cdot b_{l+1,j} + \dots + 0 \cdot b_{mj}$$

$$= b_{ij} - \frac{b_{lj}}{x_{lk}} \cdot x_{ik}$$

என்றும்,

$$\overline{b_{lj}} = 0 \cdot b_{lj} + \dots + 0 \cdot b_{l-1,j} + \left(\frac{1}{x_{lk}}\right) \cdot b_{lj} + 0 \cdot b_{l+1,j} + \dots + 0 \cdot b_{mj}$$

$$= \frac{b_{lj}}{x_{lk}}$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. எனவே, B^{-1}-ன் மூலகங்களைக் கொண்டே புதிய அடிப்படை $\overline{B}$-ன் தன் மாற்று அணி $\overline{B}^{-1}$-ன் மூலகங்கள் $\overline{b_{ij}}$ வாய்பாடுகள் (7·7)-இலிருந்து எழுதப்படலாம்.

விளக்கமாகச் சமன்பாடுகளை எழுதினல் நமது பிரச்சினை

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

$$x_1, x_2, \dots x_n > 0 \qquad (7\cdot10)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \qquad (7\cdot11)$$

என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்புக்கான தீர்வைக் காண்பதாகும். பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாத வகையில் (தேவையானல் கட்டுப் பாட்டை —1 ஆல் இருபுறமும் பெருக்கி) அனைத்து i-க்கும் $b_i > 0$ என்று கொள்கிறோம்.

$$X_{n+m+1} = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n \qquad (7\cdot12)$$

என்க. பிரச்சினையின் நோக்கம் x_{n+m+1}-ன் மீப்பெரு மதிப்பிற்கான தீர்வு காண்பதேயாகும். x_{n+m+1}-ஐ குறிக்கட்டுப்பாடு இல்லாத மாறி யாக கொண்டால் மேலே எடுத்துக் கொண்ட பிரச்சினை

x_{n+m+1}

என்ற புதுக் குறிக்கோள் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பை (7·9) (7·10) என்ற கட்டுப்பாடுகளுடன்

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + x_{n+m+1} = 0 \qquad (7{\cdot}13)$$

என்று (7·12)–இலிருந்து கிடைக்கும் கூடுதலான கட்டுப்பாடுடன் காண வேண்டும் என்பதாக மாறுகிறது.

சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் செய்தது போலவே கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளில் அல்லது தேவையானுல் செயற்கை மாறிகளை உட்படுத்தி ஓரலகு வெக்டர்களால் அமைக்கப்பட்ட ஓரலகு அணியை அடிப்படையாக எடுத்துக் கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தொடங்குகிறோம். செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்தும் போது முதனிலை செய்தக்க தீர்வு ஒன்றை முதலில் கண்டுபிடித்துப் பின்னர் படிப்படியாக இறுதிச்சிறப்புத் தீர்வை அடைகிறோம். செய்தக்க தீர்வைக் கண்டு பிடிக்கும் பகுதியை பகுதி *I* (Phase *I*) என்றும் இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வைக் கண்டறியும் பகுதியைப் பகுதி*II* (Phase*II*) என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இவ்விரு பகுதிகளையும், அவற்றின் வெவ்வேறு படிகளையும் (**Steps**) இனி விரிவாக ஆராய்வோம்.

பகுதி *I*–க்கான கணக்கீடுகளை எளிதாக்கப் பின்வரும் கூடுதலான (**Redundant**) சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

$$a_{m+2,1}\, x_1 + a_{m+2,2}\, x_2 + \dots + a_{m+2,n}\, x_n + x_{m+n+2} = b_{m+2} \qquad (7.14)$$

இங்கு

$$a_{m+2,j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij},\; j = 1, 2, \dots n \qquad (7{\cdot}15)$$

$$b_{m+2} = -\sum_{i=1}^{m} b_i \qquad (7{\cdot}16)$$

என்று எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. A–ன் j–வது நிரலைக் கூட்டிக் குறியை மாற்றினுல் $a_{m+2,j}$–ம் கட்டுப்பாடுகள் (7.9)-ன் வலப்புறங்களைக் கூட்டிக் குறியை மாற்றினுல் b_{m+2}–ம் கிடைக்கின்றன. சமச்சீர் தன்மையை கருத்தில் கொண்டு $c_j = a_{m+1,j}$ என்று எழுதுவோம் ($j = 1, 2, \dots n$). சமன்பாட்டுக்கு ஒன்ருக (7.9)-ல் $x_{n+i},\ i = 1, 2, \dots, m$ என்னும் செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்துகிறோம்.

நமது நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை பின்வரும் அமைப்பில் எழுதப்படலாம்.

$$\left.\begin{array}{ll}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & =b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\qquad+x_{n+2} & =b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\qquad+x_{n+m} & =b_m\\ a_{m+1,1}x_1+a_{m+1,2}x_2+\ldots+a_{m+1,n}x_n\qquad+x_{n+m+1} & =0\\ a_{m+2,1}x_1+a_{m+2,2}x_1+\ldots+a_{m+2,n}x_n\qquad+x_{n+m+2} & =0\end{array}\right\}\quad(7\cdot17)$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1>0,\ x_2>0,\ldots,\ x_n>0\\ x_{n+1}>0.\ x_{n+2}>0,\ldots,\ x_{n+m}>0\end{array}\right\}\quad(7\cdot18)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$x_{n+m+1}\text{ - ன்}\quad(7\cdot19)$$

மீப்பெரு மதிப்பு காண்க.

(7·17)–ன் முதல் m - சமன்பாடுகளைக் கூட்டி (7·15), (7·16)-களைப் பயன்படுத்தினால்

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j+x_{n+i}\right)=\sum_{i=1}^{m}b_i$$

(அ-து) $$\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\right)+\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}\quad+\sum_{i=1}^{m}b_i$$

(அ-து) $$-\sum_{j=1}^{n}a_{m+2,j}\;x_j+\sum_{i=1}^{n}x_{n+i}=-b_{m+2}$$

என்று கிடைக்கிறது. எனவே (7.17)–ன் கடைசிச் சமன் பாட்டிலிருந்து ($m+2$–வது கட்டுப்பாடு)

$$x_{n+m+2}=-\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}\quad(7\cdot20)$$

என்று கிடைக்கும். $x_{n+i}>0,\ i=1,2,\ldots,m$ என்பதால் $x_{n+m+2}<0$ என்று அறியலாம். (7.17) –ன் i–வது கட்டுப்பாட்டிலிருந்து

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$ என்பதின் செய்தகா தன்மையை நீக்குவதற்காக

உட்புகுத்தப்பட்ட மாறி x_{n+i} என்பதால், $\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$ கட்டுப்பாடுகள்

(7.9)-ன் செய்தகா தன்மையின் அதாவது குறையல்லாத் தோராய தீர்விற்கான பிழைகளின் கூடுதலைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம். எனவே, x_{n+m+2}, இச்செய்தகா தன்மையின் (infeasibility) கூடுதலின் அதாவது மொத்தப் பிழையின் குறை மதிப்பைக் குறிக்கிறது. [சமன்பாடு (7.20)-ஐப் பார்க்கவும்]

(7.17), (7.18), (7.19)-ல் கண்டவாறு திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்னையில் $n+m+2$ மாறிகள் $m+2$ சமன்பாட்டுக் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன. முதல் $n+m$ மாறிகள் குறையல்லாதவை என்றும், $n+m+1$ ஆவதுமாறிக் குறிக்கட்டுப்பாடு அற்றது என்றும் $n+m+2$ ஆவது மாறி மிகையல்லாதது என்றும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இப்பிரச்சினைக்கான அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு x_j, $j = 1, 2, \ldots m, m+1, m+2$ என்ற மாறிகளுள் $m+2$ மாறிகளை பெற்றிருக்க வேண்டும். கடைசி இரண்டு மாறிகள் குறிக்கட்டுப் பாடற்றவை; அவை எல்லாத் தீர்வுகளிலும் இடம்பெற வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினையின் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு (அவ்வாறு ஒன்று இருக்குமானல்) $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற மாறிகளுள்ளிருந்து கிடைக்கும் m மாறிகளாகும். $x_{n+m+2} < 0$ என்பது முன்பே கூறப்பட்டது x_{n+m+1}-ன் மதிப்பு கொடுக்கப் பட்ட பிரச்னை [(7.9), (7.10), (7.11) வரையறுக்கும் பிரச்சினை]யின் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பாகும்.

திருத்தியமைக்கப்பட்ட பிரச்னையின் கணக்கீட்டு முறை m செயற்கை மாறிகள் x_{n+i}, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, x_{n+m+1}, x_{n+m+2} என்ற மாறிகள் அமைக்கும் அடிப்படை ஒரலகு அணியுடன் தொடங்குகிறது. கீழே விவரிக்கப்படுகின்றவாறு பகுதி *I*-ன் முறையில் முதனிலை அடிப்படை செய்தக்கதீர்வைக் காணுதல்வேண்டும்.

x_{n+m+2}-ன் மீப்பெரு மதிப்பு 0 என்றால் ($x_{n+m+2} < 0$ என்பதை நினைவிற் கொள்க) (7.20) இலிருந்து அனைத்து i-க்கும் $x_{n+i} > 0$ என்பதால் $x_{n+i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ என்று கிடைக்கும். எனவே இந்த நிலையில் $j=1,2,\ldots,n$ என்ற மதிப்புகளுள் m மதிப்புகளைஅடிக்குறியாகக் கொண்ட தீர்வின் x_j-க்கள் (7.9), (7.10), (7.11) அமைக்கும் பிரச்னையின் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வை அமைக்கின்றன. x_{n+m+2}-ன் மீப்பெரு

மதிப்புக் குறையெண் என்றால் திருத்திய பிரச்சினையின் தீர்வில் ஒரு செயற்கை மாறியாவது மிகை மதிப்போடு இடம் பெறும். ஆகையால் எடுத்துக் கொண்ட பிரச்சினைக்குச் செய்தக்க தீர்வு காணமுடியாது. இதுவே பகுதி *I*-ன் கணக்கீட்டின் நோக்கமாகும்.

$x_{n+m+2} = 0$ என்ற நிலையில் பகுதி *II*-ன் கணக்கீடுகள் தொடங்குகின்றன. கட்டுப்பாடுகள் (7·17), (7·18)-களுக்கு இணங்க x_{n+m+1}-ன் மீப்பெரு மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறோம். இப்பகுதியில் தோன்றும் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வுகள் கணத்தில் செயற்கை மாறிகள் 0 மதிப்பை ஏற்றுத் தோன்றலாம். பகுதி *II*-ன் இறுதித் தீர்வே தேவையான இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வு ஆகும்.

இப்பொழுது முழுமையும் செயற்கை மாறிகளாலான அடிப்படையுடன் தொடங்கும் கணக்கீட்டு முறையின் பல்வேறு படிகளைக் கவனிப்போம். நமக்குத் தேவையான பின்வரும் விவரங்கள் பட்டியல் படுத்தப்பட்டு அட்டவணையில் குறிக்கப்பட வேண்டும்: தீர்வின் மாறிகள், அவற்றின் மதிப்புகள், நடை முறை அடிப்படையின் தன்மாற்று ஆகியவை. புதுத்தீர்வுகளைக் காணும்போது z_j-க்களின் மதிப்புகளைக்காண வழி முறைகள் இருக்க வேண்டும். இதற்கு, முன்னர் (7.4)-ல் வரையறுக்கப்பட்ட மதிப்பீட்டு வெக்டர் $\pi = c_0 B^{-1}$ ஒவ்வொரு நடைமுறை அடிப்படைக்கும் காணப்பட வேண்டும். பின்னர் அடிப்படையில் உட்புகும் வெக்டரைக் கண்டு $X_j = B^{-1}P_j$-க்களைக் கணக்கிட வேண்டும். (P_j உட்புகும் வெக்டரோடு தொடர்பு கொண்டது). வழக்கமான சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக்கான உத்தியைக் கையாண்டு அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட வேண்டிய வெக்டரைத் தீர்மானிக்கிறோம். அடுத்து, நீக்க வாய்பாடுகள் (7·7)-ஐப் பயன்படுத்தி நடைமுறை அடிப்படையின் தன் மாற்றிலிருந்து புது அடிப்படையின் தன் மாற்றைப் பெறுகிறோம்.

சமன்பாடுகள் (7·17)-லிருந்து $x_1, x_2 \dots x_n$-ன் கெழுக்களைப் பிரித்தெடுத்து $(m+2) \times n$ அணி ஒன்றை அமைக்கலாம். இதை $\overline{A}$ என்போம். அதாவது,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lk} & \cdots & a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,k} & \cdots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \cdots & a_{m+2,k} & \cdots & a_{m+2,n} \end{pmatrix}.$$

என்று வரையறுக்கிறோம். இதன் நிரல் வெக்டர்களை $\overline{A}_j$ $j = 1, 2, \ldots, n$ என்று குறிக்கலாம். பாடம் 3-ல் செயற்கை மாறிகளைக்கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் தீர்வு காணும் முறை விவரிக்கப்பட்டது. அந்தப் பாடத்தின் அட்டவணை (3·6) உடன் $\overline{A}$ தரும் தகவல்களை ஒப்புநோக்குக. x_{ij}–க்களை a_{ij} என்று மாற்றினால் இந்த அட்டவணையின் $1, 2, \ldots, m, m+1, m+2$ நிரைகளும் $P_1, P_2, \ldots, P_n$ என்ற நிரல்களும் அமைக்கும் அணியே $\overline{A}$ ஆகும். ஆனால் அட்டவணை (3·6)-ன் $m+1, m+2$-ஆவது மூலகங்கள் குறி மாற்றப்பட்டு $\overline{A}$-ன் $m+1$, $m+2$-ஆவது நிரைகளாகத் தோன்றுகின்றன. சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக் கணக்கீட்டில் செய்தது போலவே இத் திருத்தப்பட்ட முறையிலும் செயற்கை மாறிகள் அடிப்படையில் இருக்கும் வரை $(m+2)$-வது நிரையும் அதன் பின்னர் $(m+1)$-வது நிரையும் (z_j-c_j)–க்களைக் காணப்பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

திருத்தப்பட்ட முறையில் தொடக்கநிலை அடிப்படை x_{n+1}, $x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}, x_{n+m+1}, x_{n+m+2}$ ஆகிய மாறிகளின் கெழுக்களால் [கட்டுப்பாடுகள் (7·17)-ல்)] அமைக்கப்படும் $(m+2) \times (m+2)$ ஓரலகு அணியாகும். இதன் தன்மாற்று அணியும் இதே பரிமாணமுள்ள ஓரலகு அணியேயாகும். இத்தொடக்கநிலை அடிப்படையின் தன் மாற்றை U என்று குறிப்போம். U–ன் முதல் m நிரைகளும், m நிரல்களும் அமைக்கும் அணி தொடக்கநிலை அடிப்படை B-ன் தன்மாற்று அணி B^{-1} ஆகும். கடைசி இரண்டு நிரைகள் அடிப்படையில் புகுத்தப்படவேண்டிய வெக்டரைத் தீர்மானிக்கப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கணக்கீட்டின் பகுதி I-க்கான தகவல்கள் $(m+2)$-வது நிரையிலிருந்தும், பகுதி II-க்கான தகவல்கள் $(m+1)$-வது நிரையிலிருந்தும் பெறப்படுகின்றன. எனவே,

$$
\begin{array}{c} \\ U = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc|cc} 1 & 2 & \ldots & l & \ldots & m & m+1, & m+2 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc|cc}
1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & & & & & & \cdots & \\
0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & & & & & & \cdots & \\
0 & 0 & & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} \text{நிரல்/நிரை} \\ U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_l \\ \cdots\cdots \\ U_m \\ U_{m+1} \\ U_{m+2} \end{array}
$$

இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட U-ன் நிரைவெக்டர்களை முறையே $U_1, U_2, \ldots, U_m, U_{m+1}, U_{m+2}$ என்றும், அதன் மூலகங்களை u_{ij} என்றும் குறிப்போம். எனவே,

$$U_i = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{i,m+2})$$

ஆகும். கணக்கீட்டிற்கான "தொடக்கநிலை" அட்டவணையில் இந்த அணி U-வைப்பதிக்கிறோம். குறியீட்டின் எளிமை கருதி நடைமுறை அடிப்படை, புதிய அடிப்படை இரண்டினுடையவும் i-வது நிரையை U_i என்றே குறிக்கிறோம். சந்தர்ப்பம் அது எதைக் குறிக்கிறது என்பதைத் தெளிவாக்கும்.

அட்டவணை (7.1)-ல் இரண்டுபகுதிகள் உள்ளன -- (i) தொடக்க நிலை அட்டவணை, (ii) மாற்றியமைக்கப்பட்ட அட்டவணை. அணி U-வையும் முதனிலை தீர்விற்கான அடிப்படை மாறிகள் x_{n+i}, அவற்றின் மதிப்புகள் b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), $x_{n+m+1} = 0$, $x_{n+m+2} = b_{m+2}$ ஆகிய யாவையும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த நிலையிலிருந்து அடுத்த அட்டவணையைப் பெற்று, திரும்பத்திரும்ப இதே முறையைப் பின்பற்றி இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வைப் பெறுவதே நமது நோக்கமாகும். இதற்கான, கணக்கீட்டுகளின் இருபகுதிகளையும் அவற்றின் பல்வேறு படிகளையும் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

கணக்கீட்டு முறையின் படிகள் — பகுதி I :

(மிகை மதிப்புப்பெற்ற செயற்கை மாறிகளும் அடிப்படையில் இருக்கும் நிலை)

படி - 1. $x_{n+m+2} < 0$ என்றால்

$$\delta_j = U_{m+2}\,\overline{A_j} = \sum_{s=1}^{m+2} u_{m+2,\,s}\,a_{\,j}\text{-ஐ } j = 1, 2, \ldots n \text{ மதிப்}$$

புகளுக்கு கணக்கிடுகிறோம். பின்னர் படி 2-க்குச் செல்கிறோம். $x_{n+m+2} = 0$ என்றால் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பகுதி II, படி 1-க்குச் செல்கிறோம்.

படி–2. அனைத்து j-க்கும் $\delta_j > 0$ என்றால் x_{n+m+2}-ன் மதிப்பு மீப்பெருமம் ஆகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினைக்குச் செய்தக்க தீர்வு கிடையாது.

j-ன் ஒரு மதிப்பிற்காயினும் $\delta_j < 0$ என்றால் மீச்சிறுமம் $\underset{j,\,\delta_j<0}{(\delta_j)}$ -ஐக் கணக்கிடுக. δ_k இந்த மீச்சிறுமம் என்றால் x_k என்னும் மாறியை அடிப்படையில் உட்புகுத்த வேண்டும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடிக்குறிகள் k இக்கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்தால் அவற்றுள் மிகச்சிறிய அடிக்குறியைத் தேர்ந்தெடுக்கும் வழக்கைக் (convention) கைக்கொள்ள வேண்டும்.

அட்டவணையின் நிரை எண்	தீர்வில் மாறிகளின் அடிக்குறி	மாறிகளின் மதிப்புகள்	அணி U										$U_i \; \overline{A}_k$
			அடிப்படையின் தன்மாற்று, B^{-1}										$(B^{-1} \; P_k)$
			U_{m+1}										$U_{m+1} \; \overline{A}_k$
			U_{m+2}										$U_{m+2} \; \overline{A}_k$

1. தொடக்க நிலை அட்டவணை

1	$n+1$	$x_{n+1} = b_1$	1	0	·	·	0	·	·	0	0	0	x_{1k}
2	$n+2$	$x_{n+2} = b_2$	0	1	·	·	0	·	·	0	0	0	x_{2k}
·	·	· ·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	· ·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
l	$n+l$	$x_{n+l} = b_l$	0	0	·	·	1	·	·	0	0	0	x_{lk}
·	·	· ·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	· ·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
m	$n+m$	$x_{n+m} = b_m$	0	0	·	·	0	·	·	1	0	0	x_{mk}
$m+1$	$n+m+1$	$x_{n+m+1}=0$	0	0	·	·	0	·	·	0	1	0	$x_{m+1,\,k}$
$m+2$	$n+m+2$	$x_{n+m+2}= b_{m+2}$	0	0	·	·	0	·	·	0	0	1	$x_{m+2,\,k}$

2. மாற்றியமைக்கப்பட்ட அட்டவணை

1	$n+1$	x'_{n+1}	u'_{11}	u'_{12}	·	·	u'_{1l}	·	·	u'_{1m}	0	0	
2	$n+2$	x'_{n+2}	u'_{21}	u'_{22}	·	·	u'_{2l}	·	·	u'_{2m}	0	0	
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	
l	k	x'_k	u'_{l1}	u'_{l2}	·	·	u'_{ll}	·	·	u'_{lm}	0	0	
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	
m	$n+m$	x'_{n+m}	u'_{m1}	u'_{m2}	·	·	u'_{ml}	·	·	u'_{mm}	0	0	
$m+1$	$n+m+1$	x'_{n+m+1}	$u'_{m+1,\,1}$	$u'_{m+1,\,2}$	·	·	$u'_{m+1,\,l}$	·	·	$u'_{m+1,\,m}$	1	0	
$m+2$	$n+m+2$	x'_{n+m+2}	$u'_{m+2,\,1}$	$u'_{m+2,\,2}$	·	·	$u'_{m+2,\,l}$	·	·	$u'_{m+2,\,m}$	0	1	

அட்டவணை (7·1)

படி-3.

$$x_{ik} = U_i \overline{A_k} = \sum_{s=1}^{m+2} u_{is}\, a_{sk}, \quad i=1, 2, \ldots m, m+1, m+2$$

என்பவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம்.

$$\theta_0 = \underset{i,\, x_{ik} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \frac{x_{i0}}{x_{ik}} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}} \text{ என்க.}$$

இங்கு 1, 2, ... m என்ற மதிப்புகளை மட்டுமே i ஏற்கிறது. பிறகு l-வது நிரையிலுள்ள மாறி x_{n+l} அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப் படுகிறது. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடிக்குறிகள் l இந்த விதியினுல் தீர்மானிக்கப்பட்டால் அவற்றுள் மிகச்சிறிய எண்ணைத் தேர்ந் தெடுக்கிறோம்.

படி-4. அடிப்படைத் தீர்வில் உள்ள மாறிகளின் புதிய மதிப்பு கள் பின்வரும் வாய்பாடுகளிலிருந்து எழுதப்படுகின்றன:

$$x'_{i0} = x_{i0} - \frac{x_{l0}}{x_{lk}} x_{ik} \quad (i \neq k \text{ என்றால்})$$

$$x'_{k0} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}}$$

அணி U- ன் மூலகங்களின் புதிய மதிப்புகள் (அடிப்படை மாற்றத் தின் காரணமாக மாறிய மதிப்புகள்) பின்வரும் தொடர்புகளால் பெறப்படுகின்றன:

$$u'_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{lj}}{u_{lk}} x_{ik} \quad (i \neq l \text{ என்றால்})$$

$$u'_{lj} = \frac{u_{lj}}{x_{lk}}$$

இந்தமாற்றங்களால் U-ன் $m+1$ $m+2$,-வது நிரல்கள் மாறுவதில்லை. $c_j - z_j$ கணக்கிடும் போது இவை சரியான c_j-க்களைக் கூட்ட உதவு கின்றன. அட்டவணை (7:1)-ல் மாற்றியமைக்கப்பட்ட பகுதியில் காட்டியபடி அணி U-ன் மாறிய நிரைகளைப் பயன்படுத்தி (அ) செய்தக்க தீர்வுகள் இல்லை அல்லது (ஆ) $x_{n+m+2} = 0$ என்று தீர்மானிக்கப்படும் வரை பகுதி I-ன் முந்திய படிகளைத் திரும்பத் திரும்ப செயல்படுத்துகிறோம்.

$x_{n+m+2} = 0$ என்று ஒரு நிலையில் தெரிந்தால் கணக்கீட்டு முறையின் கீழ்க்காணும் பகுதி II-ஐத் தொடருகிறோம்.

கணக்கீட்டு முறையின் படிகள் பகுதி *II*

(தீர்வில் மிகை மதிப்பு பெற்ற செயற்கை மாறிகள் இல்லாத நிலை)

படி–1 இப்பொழுது $x_{n+m+2}=0$

$$\gamma_j = U_{m+1}\, \overline{A_j} = \sum_{s=1}^{m+2} u_{m+1,s}\, a_{sj},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம்.

படி–2 அனைத்து j-க்கும் $\gamma_j \geqslant 0$ என்றால் x_{n+m+1} தன் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற்றுள்ளது. இந்த நிலையில் அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வுமாகும். x_{n+m+1}-ன் மதிப்பைக் குறிமாற்றி எழுதினால் மீச்சிறுமப் படுத்த வேண்டிய குறிக்கோள் சார்பின் உண்மை மதிப்புக் கிடைக்கிறது. j-ன் ஒரு மதிப்பிற்காயினும் $\gamma_j < 0$ என்பது உண்மையானால் மீச்சிறுமம் γ_j-ஐக் கணக்

$$j, \gamma_j < 0$$

கிடுகிறோம். இம்மீச்சிறுமம் γ_k என்றால் x_k என்ற மாறியைத் தீர்வில் உட்புகுத்தத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடிக்குறிகள் k இக்கட்டுப் பாட்டை நிறைவு செய்தால் முன்னர் கையாண்ட வழக்கையே பயன்படுத்தி மிகச்சிறிய அடிக்குறி பெற்ற x_k-ஐ அடிப்படையில் உட்புகுத்தத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம்.

படி–3

$$x_{ik} = U_i\, \overline{A_k} = \sum_{s=1}^{m+2} u_{is}\, a_{sk}$$

என்பவற்றை $i = 1, 2, \ldots, m, m+1, m+2$ என்ற அடிக்குறிகளுக்குக் கணக்கிடுகிறோம். அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட வேண்டிய மாறி l-வது நிரையில் இருக்கிறது என்றால் l பின் வரும் கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

$$\theta_0 = \underset{i,\ x_{ik} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \frac{x_{io}}{x_{ik}} = \frac{x_{lo}}{x_{lk}},\ i = 1, 2, \ldots, m$$

முன் போலவே ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட l இருக்குமானால் அவற்றுள் மிகச்சிறிய l-மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம்.

அனைத்து i-க்கும் $x_{ik} \leqslant 0$ என்றிருந்தால் நமது முறை குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பை விருப்பப்படி உயர்த்தவல்ல தீர்வைக் கொடுக்கிறது.

படி–4 அடிப்படை மாற்றத்தின் விளைவாக மாறிகளின் மதிப்புகள் மாறுகின்றன. இப்புதிய மதிப்புகள்

$$x'_{io} = x_{io} - \frac{x_{lo}}{x_{lk}}\, x_{ik} \quad (i \neq k \text{ என்றால்})$$

$$x'_{ko} = \frac{x_{lo}}{x_{lk}}$$

என்ற வாய்பாடுகளால் பெறப்படுகின்றன.

அணி U -ன் மாற்றத்திற்கான வாய்பாடுகள்

$$u'_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{lj}}{x_{lk}}\, x_{ik} \quad (i \neq l \text{ என்றால்})$$

$$u'_{lj} = \frac{u_{lj}}{x_{lk}} \text{ ஆகும்.}$$

முடிவுள்ள அல்லது வரம்பற்ற மதிப்பைக் குறிக்கோள் சார்புக்கு அளிக்கும் இறுதிச்சிறப்புத்தீர்வு தீர்மானிக்கப்படும் வரையில் இக்கணக்கீட்டு முறையின் பல்வேறு படிகள் திரும்பத்திரும்பச் செயல்படுத்தப் படுகின்றன.

அட்டவணை (7.1)-ல் பிரச்சினையின் முதனிலைத்தீர்வும் கணக்கீட்டு முறையின் பல்வேறு படிகளின் விளைவுகளும் ஒழுங்கு படுத்தப்பட்டு குறிக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு தன்மாற்றுடனும் தொடர்பு கொண்ட x_{ik}-களைக் குறிப்பதற்கு தனியே நிரல் ஒன்று ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. தடித்த கோடுகளால் அடைபட்ட $(m+2)\times(m+2)$ சதுர அணி தன்மாற்று அணி U-யைக்குறிக்கின்றது. அணி U-ன் கடைசி இரண்டு நிரல்கள் மாறுவதேயில்லை. P_j, $j=1, 2, \ldots, n+m$, களிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அடிப்படை m– பரிமாண அணியின் தன்மாற்று U–விலிருந்து புள்ளிக்கோடுகளால் பிரித்துத் தனியே காட்டப்பட்டுள்ளது.

திருத்தியமைக்கப்பட்டப் பிரச்சினையின் கணித மாதிரியில் செயற்கை மாறிகளைச் சேர்க்காமலேயே ஓரலகு வெக்டர்கள் இருக்குமானால் தொடக்கநிலை அடிப்படையில் அவற்றைப் பயன் படுத்திக் கொள்ளலாம். ஆனால் இவ்வெக்டர்களுக்கான செலவுக் கெழுக்கள் பூச்சியமாக இருக்கவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, தொய்வு மாறிகளுக்கான வெக்டர்களை இவ்வாறு பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். ஆனால், S என்ற கணம் செயற்கை மாறிகள்

தேவைப்படுகின்ற நிரைகளின் அடிக்குறிகளைக் கொண்டது என்றால், இப்போது

$$a_{m+2,j} = -\sum_{i \in s} a_{ij}$$

$$b_{m+2} = -\sum_{i \in s} b_i$$

என்று வரையறுக்கிறோம். செயற்கைமாறி எதுவும் தேவையில்லாமலேயே பிரச்சினை அமைந்துவிட்டால் S வெற்றுக் கணமாகும். இப்போது $b_{m+2} = 0$. எனவே கணக்கீட்டு முறையை பகுதி *II*–இலிருந்து தொடங்கவேண்டும்.

7.3 தன்மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பு :

சென்ற பகுதியின் (§ 7.2) குறியீட்டைத் தொடர்ந்து y_{il} என்ற எண்களைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்வோம்:

$$y_{il} = \begin{cases} -\dfrac{x_{lk}}{x_{lk}}, & i \neq l \text{ என்றால்} \\[2ex] \dfrac{1}{x_{lk}}, & i = l \text{ என்றால்.} \end{cases} \tag{7.21}$$

இதன் காரணமாக (7.8)-ல் வரையறுக்கப்பட்ட E^l—ஐ

$$E^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & y_{1l} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & y_{2l} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & y_{ll} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{ml} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{7·22}$$

என்று எழுதலாம். இங்கு பின்வரும் வரையறைகளையும் நினைவு படுத்திக்கொள்வது உதவியாக விருக்கும்:

$$B = (P_1, P_2 \dots, P_l, \dots P_m)$$

$$\overline{B} = (P_1, P_2, \dots P_k, \dots P_m)$$

$$B^{-1} = (b_{ij}) \quad ; \quad \overline{B}^{-1} = (\overline{b_{ij}})$$

$$B^{-1} P_k = X_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \cdots \\ x_{lk} \\ \cdots \\ x_{mk} \end{pmatrix}$$

$\overline{B}$, B என்ற அடிப்படைகள் l-வது அடிப்படையில் மட்டும் மாறுதல் பெற்றவை. P_k முன்னரே B-ல் இல்லாத வெக்டராகும். b_{ij}, $\overline{b_{ij}}$ என்பன நீக்கவாய்பாடுகள் (7.7)-கள் மூலம் தொடர்புப் பெற்றுள்ளன. E^l -ஐச் சுருக்கமாக $(l\,;\, y_{1l}, y_{2l}, \ldots, y_{ll}, \ldots, y_{ml})$ என்று குறிப்பதுண்டு.

சென்ற பகுதியிலேயே

$$E^l B^{-1} = \overline{B}^{-1}$$

என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது. எனவே B^{-1} - க்கு நீக்க வாய் பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\overline{B}^{-1}$-ஐக் காண்பது B^{-1} - ஐ E^l ஆல் இடப் பெருக்கல் (left multiplication) செய்வதற்குச் சமமாகும் என்று அறிகிறோம்.

சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் m-பரிமாண ஒரலகு வெக்டரைப் பெற்ற, தேவையானால் செயற்கை மாறிகளும் உள்ளிட்ட, அடிப்படை B_0-ஐ வைத்து கணக்கீடுகளைத் தொடங்குகிறோம். இந்த அடிப்படை B_0-ன் தன்மாற்றும் ஒரலகு அணியே. இதை E_0 என்று குறிப்போம். இதில் உள்ள l-வது நிரல் வெக்டர் P_l-ஐ நீக்கிவிட்டு வேறு வெக்டர் P_k-ஐ உட்புகுத்தி அடுத்த அடிப்படை B_1-ன் தன்மாற்றைப் பெறுகிறோம். இந்த அடிப்படைமாற்றத்திற் கான எளிய அணியை $E_1{}^l$ என்று குறித்தால், மேலே நிறுவியபடி $E_1{}^l\ E_0 = E_1{}^l B_0{}^{-1} = B_1{}^{-1}$ என்று கிடைக்கிறது. p-வது அடிப் படை மாற்றத்தின் போது கிடைக்கும் புது அடிப்படை B_p என்றால், இம்மாதிரியே தொடர்ந்து,

$$E_p{}^l\, E_{p-1}{}^l\ \ldots\ E_1{}^l\, E_0 = B_p{}^{-1}$$

என்ற தொடர்பைப் பெறலாம். இந்தத் தொடர்பில் $E_r{}^l$-ல் உள்ள l என்ற மேற்குறி $r-1$-வது அடிப்படை மாற்றத்தின் போது நீக்கப் படுகின்ற வெக்டரின் அடிக்குறியைக் குறிப்பதாகும். ஒவ்வொரு அடிப்படை B_p -க்கும் அதனுடன் தொடர்பு பெற்ற எளிய அணிகள் கொடுக்கப்பட்டால் (l மாறிக் கொண்டே வருவதால் இவை வெவ் வேறு அணிகள் ஆகும்) $B_p{}^{-1}$-ஐப் பெறலாம் என்பது தெளிவா கிறது. எனவே, திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் கணக்கீடு கள் தொடரப்படலாம்.

பெருக்கல் அமைப்பு முறையில் கணக்கீடுகள் ஓரலகு அணி U-விலிருந்து தொடங்குகிறது. U-வை (7.17), (7.18), (7.19)-களால் விவரிக்கப்பட்டப் பிரச்சினையின் முதனிலே அடிப்படையின் தன்மாற்றுகக் கருதலாம். இதன் பரிமாணமும் இதனுடன் தொடர்பு பெற்ற எளிய அணிகளின் பரிமாணமும் $m+2$ ஆகும். § 7.2-ல் விவரிக்கப்பட்டக் கணக்கீட்டின் பகுதி I, பகுதி II பின் வரும் திருத்தங்களுடன் செயல்படுகின்றன.

பகுதி I படி-1-க்கான $\delta_j = U_{m+2}\, \overline{A_j}$-களே தன்மாற்று அணி U வெளிப்படையாக அறியப்படுவதால் எளிதாகக் கணக்கிடலாம். ஆனல் இதற்கு முதலில் ஒவ்வொரு நிலையிலும் U_{m+2}-ஐ ($m+2$-வது நிரை வெக்டர்) அறிய வேண்டும்.

$$V_{m+2} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

என்பது $m+2$ பரிமாணம் பெற்ற ஓரலகு நிரைவெக்டர் என்றுல் $U_{m+2} = V_{m+2}\, E_p{}^l\, E_{p-1}{}^l \ldots E_1{}^l$ ஆகும். வலதுபுறம் உள்ள பெருக்கலேத் திறம்படச்செய்வதற்கு, எளிய அணிகளால் V_{m+2}-விலிருந்து தொடங்கி p-ன் இறங்கு வரிசையில் வலப்பெருக்கம் செய்கிறேம். அதாவது, அணிக்காரணிகளேக் கீழ்கண்டவாறு சேர்த்துப் பெருக்கற் பலன் காண்கிறேம்:

$$U_{m+2} = \left\{ \left[\left(V_{m+2}\; E_p{}^l \right)\; E_{p-1}{}^l \right] \ldots\ldots E_1{}^l \right\} \qquad (7.23)$$

அணி V_{m+2} எளிய அணிகள் $E_r{}^l$ களால் அவை பிறப்பிக்கப்பட்ட வரிசைக்கு எதிர் வரிசையில் படிப்படியாக வலப்பெருக்கம் செய்யப்பட்டு U_{m+2} (7.23) என்ற அமைப்பில் காணப்படுவதால் இதைப் பின்நோக்கு மாற்றம் (backward transformation) என்று கூறுகிறேம்.

$$V = (v_1, v_2, v_3 \ldots v_{m+2})$$

என்ற நிரைவெக்டரை $E_r{}^l$ என்ற எளிய அணியால் வலப்பெருக்கம் செய்யும்போது கிடைக்கும் அணியும் ஒரு $m+2$ – பரிமாண நிரை வெக்டராகும். இதை

$$W = (w_1, w_2, \ldots, w_{m+2})$$

என்று குறிக்கலாம். எனவே (7.22)-இலிருந்து

$$w_i = v_i \qquad (i \neq l \text{ என்றுல்})$$
$$w_l = \sum_i v_i\, y_{il}$$

என்ற வாய்பாடுகளால் W-ஐக் கண்டறியலாம்.

படி – 3 – ல், X_k - யைக் காண்பதற்குப் பின்வருமாறு எளிய அணிகளைச் சேர்த்து எழுதுவது வசதியாக இருக்கும்:

$$X_k = \left\{ E_p{}^l \left[E_{p-1}{}^l \ldots\ldots (E_1{}^l \overline{A_k}) \right] \right\} \tag{7.24}$$

நிரல் வெக்டர் $\overline{A_k}$ எளிய அணிகள் $E_r{}^l$ களால் அவை பிறப்பிக்கப் பட்ட வரிசையிலேயே படிப்படியாக இடப் பெருக்கம் செய்யப்பட்டு X_k **(7.24)** அமைப்பில் காணப்படுவதால் இதை முன்–நோக்கு மாற்றம் **(forward transformation)** என்று கூறுகிறோம்.

$$G = (g_1, g_2, \ldots, g_{m+2})$$

என்ற நிரல்வெக்டரை $E_r{}^l$ என்ற எளிய வெக்டரால் இடப்பெருக்கம் செய்யும் போது கிடைக்கும் அணியும் ஒரு $(m+2)$ பரிமாண நிரல் வெக்டரேயாகும். இதை

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_{m+2})$$

என்று குறிப்போம். எனவே **(7.22)**-இலிருந்து

$$d_i = g_i + y_{il}\, g_l \qquad (i \neq l) \text{ என்றால்}$$
$$d_l = y_{ll}\, g_l$$

என்ற வாய்பாடுகளால் D-யைக் கண்டறியலாம்.

ஒவ்வொரு அடிப்படை மாற்றத்திற்குமான புதிய எளிய அணி

$$y_{il} = -\frac{x_{ik}}{x_{lk}} \qquad (i \neq l \text{ என்றால் })$$

$$y_{ll} = \frac{1}{x_{lk}}$$

என்னும் வாய்பாடுகளாலும், புதிய நடைமுறைத் தீர்வு

$$x'_{io} = x_{lo} + y_{il}\, x_{lo} \qquad (i \neq k \text{ என்றால் })$$
$$x'_{ko} = y_{ll}\, x_{lo}$$

என்ற வாய்பாடுகளாலும் கிடைக்கின்றன என்பதை § **7.2** இல் பார்த்தது நினைவிருக்கலாம்.

மேற்கண்ட திருத்தங்கள் பகுதி *II*-ன் கணக்கீடுகளுக்கும் பொருந்தும். ஆனால் பகுதி *II* படி–1–ல்

$$\left\{ \left[(V_{m+1}\, E_p{}^l)\, E_{p-1}{}^l \right] \ldots\ldots E_{1l} \right\} = U_{m+1}$$

என்பதைக் காணும் போது

$$V_{m+1} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0)$$

என்ற $(m+2)$ பரிமாண ஓரலகு நிரைவெக்டராக V_{m+1}-ஐ எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஒவ்வொரு அடிப்படைக்குமான தன்மாற்று அணியை எளிய அணிகள் மூலம் பிறப்பிப்பதால் மிகச் சிறிய அளவு தகவல்களைப் பதிவு செய்து கொள்ளுதல் போதுமானதாகிறது; அதாவது, $E_p{}^l$-களை மட்டும் பதிவு செய்து கொள்கிறோம். அளவுக்குட்பட்ட தேக்கும் சக்தி (limited storage capacity) பெற்ற கம்ப்யூட்டர்களைப் பயன்படுத்தும் போது இந்த வசதி மிகுந்த முக்யத்துவத்தைப் பெறுகிறது. ஒவ்வொரு சிம்ப்ளக்ஸ் செயல் முறைக்கும் பின்னர் தன்மாற்று U-வை முழுமையாகப் பதிவு செய்வதை விடச் சுருக்கமாக

$$E_p{}^l = (\, l\, ; y_{1l}\, y_{2l} \ldots y_{m+2,\, l}\,)_p$$

என்று பதிவு செய்து கொள்கிறோம். தற்கால கம்ப்யூட்டர் சங்கேத மொழிகள் திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் பெருக்கல் அமைப்பிலேயே பெரும்பாலும் எழுதப்படுகின்றன.

7·4 கணக்கீட்டு முறை — ஓர் எடுத்துக் காட்டு:

§§ **7.2, 7.3**-களில் விவரித்த திருத்தப்பட்ட முறைகளை விளக்கும் வகையில் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு தரப்படுகிறது. சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறை, தன்மாற்று அணிமுறை, பெருக்கல் அமைப்பு முறை ஆகிய மூன்று முறைகளிலும் ஒப்புநோக்க எளிதாக இருக்கும் பொருட்டு ஒரே கணக்கு போட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளது. சிறு கணக்கு ஆதலின் சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறையே எளிது போல் தோன்றும்; ஆனால் உண்மையில் பெரிய பிரச்னைகளின் தீர்வு காணும் போது கடைசி இரண்டு முறைகளே சாலச் சிறந்தவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : பின்வரும் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்னைக்குத் தீர்வு காண்க :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - x_4 \qquad\qquad - 2x_6 &= 5 \\ x_2 \qquad + 2x_4 - 3x_5 + x_6 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 &= 5 \\ x_1, x_2, \ldots, x_6 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$x_1 + x_2 + x_3 \text{ -ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்புக் காண்க.

அட்டவணை (7·2)

முதனிலை

i	c	அடிப்படை	P_0	1	1	1	0	0	0	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	1	P_1	5	1	0	0	−1	0	−2	
2	1	P_2	3	0	1	0	2	−3	1	
3	1	P_3	5	0	0	1	2	−5	[6]	→
			13	0	0	0	3	−8	5	

இரண்டாம் நிலை

1	1	P_1	$\frac{40}{6}$	1	0	$\frac{2}{6}$	$-\frac{2}{6}$	$-\frac{10}{6}$	0	
2	1	P_2	$\frac{13}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	[$\frac{10}{6}$]	$-\frac{13}{6}$	0	→
3	0	P_6	$\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$-\frac{5}{6}$	1	
			$\frac{53}{6}$	0	0	$-\frac{7}{6}$	$\frac{8}{6}$	$-\frac{23}{6}$	0	

மூன்றும் (இறுதி) நிலை

1	1	P_1	$\frac{71}{10}$	1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{6}{10}$	0
2	0	P_4	$\frac{13}{10}$	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{18}{10}$	0
3	0	P_6	$\frac{4}{10}$	0	$-\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$-\frac{4}{10}$	1
			$\frac{71}{10}$	0	$-\frac{8}{10}$	$-\frac{7}{10}$	0	$-\frac{6}{10}$	0

$z_j - c_j < 0$, அனைத்து j-க்கும்.

தீர்வு :

(அ) **சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறை:** கணக்கிலேயே 3×3 ஓரலகு அணி ஒன்றை x_1, x_2, x_3-க்களின் கெழுக்கள் அமைப்பதால் முதனிலை செய்தக்க தீர்வு $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ என்று கிடைத்து விடுகிறது. அட்டவணை (7.2)-ல் இந்த முறைக்கான கணக்கீடுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வில் $x_1 = \frac{71}{10}$, $x_4 = \frac{13}{10}$, $x_6 = \frac{4}{10}$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$ என்றும் குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{71}{10}$ என்றும் கிடைக்கின்றன. முன்னரே § 3.3-ல் இந்தக் கணக்கு எடுத்துக் காட்டாகத் தரப்பட்டது.

(ஆ) **தன்மாற்று அணி முறை:** முழுச் செயற்கை மாறி அடிப்படையுடன் திருத்தப்பட்ட முறையைப் பயன்படுத்தப் பிரச்னையைப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதுகிறோம்:

$$\begin{array}{l}
x_1 - x_4 - 2x_6 + x_7 = 5 \\
x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 + x_8 = 3 \\
x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 + x_9 = 5 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_{10} = 0 \\
-x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 8x_5 - 5x_6 + x_{11} = -13
\end{array}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க x_{10}-ன் மீப்பெரு மதிப்புக்காண வேண்டும். x_7, x_8, x_9 என்பன செயற்கைமாறிகள். $x_1, x_2, \ldots, x_9$ குறையல்லாமல் இருக்க வேண்டும். (7.13)-இலிருந்து நான்காவது சமன்பாடும் (7.14), (7.15), (7.16) - களிலிருந்து ஐந்தாவது சமன்பாடும் பெறப்பட்டன. § 7.2-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $\overline{A}, U$ அணிகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A_1} & \overline{A_2} & \overline{A_3} & \overline{A_4} & \overline{A_5} & \overline{A_6} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{matrix}$$

இந்த U-ல் தொடங்கி கணக்கீடுகள் செய்யப்படுகின்றன. அட்டவணை (7.3)-ல் கணக்கீடுகள் தரப்பட்டுள்ளன. இந்த அட்டவணையை (7.1)-உடன் ஒப்பிடுக.

அட்டவணை (7·3)

நிரை எண் i	தீர்வில் உள்ள மாறிகளின் அடிக்குறி	மாறிகளின் மதிப்புகள்	அணி U					x_{ik}

தொடக்க நிலை

1	7	$x_7=5$	1	0	0	0	0	-2
2	8	$x_8=3$	0	1	0	0	0	1
3	9	$x_9=5$	0	0	1	0	0	$\boxed{6}$
4	10	$x_{10}=0$	0	0	0	1	0	0
5	11	$x_{11}=-13$	0	0	0	0	1	5

$k=6$
$l=3$

இரண்டாம் நிலை

1	7	$x_7=\frac{40}{6}$	1	0	$\frac{2}{6}$	0	0	$-\frac{2}{6}$
2	8	$x_8=\frac{18}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\boxed{\frac{10}{6}}$
3	6	$x_6=\frac{5}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{6}$
4	10	$x_{10}=0$	0	0	0	1	0	0
5	11	$x_{11}=-\frac{53}{6}$	0	0	$\frac{5}{6}$	0	1	$-\frac{8}{6}$

$k=4$
$l=2$

மூன்றும் நிலை

1	7	$x_7=\frac{71}{10}$	1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	$\boxed{1}$
2	4	$x_4=\frac{13}{10}$	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	0
3	6	$x_6=\frac{4}{10}$	0	$-\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	0
4	10	$x_{10}=0$	0	0	0	1	0	1
5	11	$x_{11}=\frac{71}{10}$	0	$\frac{8}{10}$	$\frac{7}{10}$	0	1	-1

$k=1$
$l=1$

நான்காம் நிலை (இறுதி நிலை)

1	1	$x_1=\frac{71}{10}$	1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	
2	4	$x_4=\frac{13}{10}$	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	
3	6	$x_6=\frac{4}{10}$	0	$-\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	
4	10	$x_{10}=-\frac{71}{10}$	−1	$-\frac{2}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	0	
5	11	$x_{11}=0$	1	1	1	0	1	

இனி l-வது நிரையின்மாறி அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட வேண்டும் என்றால்

$$\theta_0 = \underset{i,\ x_{ik} > 0}{\text{மீச்சிறுமம்}} \frac{x_{i0}}{x_{ik}} = \frac{x_{l0}}{x_{lk}},\ i = 1,\ 2,\ 3$$

ஆகவேண்டும். x_{26}, x_{36} என்பன மிகை எண்கள்.

$\frac{x_{20}}{x_{26}}$, $\frac{x_{30}}{x_{36}}$ என்பவை 3/1, 5/6. இவற்றுள் 5/6 சிறியது எனவே $l = 3$ ஆகும். அதாவது மூன்றுவது நிரையின் மாறி x_9 அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட்டு x_6 உட்புகுத்தப் படவேண்டும். எனவே x_{36} மாற்றத்திற்கான மைய உறுப்பாகும். அட்டவணையில் இது சுழிக்கப்பட்டுள்ளது.

இனி படி 4-க்குப் போகிறோம். வழக்கமான முறைப்படி சிம்ப்ளக்ஸ் மாற்றத்திற்கான வாய்ப்பாடுகளை பயன்படுத்தி புதிய மூலகங்களைக் காண்கிறோம். முடிவில் அட்டவணை (7.3)–ன் இரண்டாம் நிலையின் கடைசி நிரலைத் தவிர மற்றயாவையும் பெறப் படுகின்றன.

இரண்டாம் நிலையிலும் $x_{11} < 0$ என்பதால் புதிய U–க்கு கணக்கீட்டின் மேற்கூறிய பகுதி I –ன் பல்வேறு படிகளைப் பின் பற்றி மூன்றும் நிலை அணியைப் பெறுகிறோம். இப்போது δ_j–க் களின் மதிப்புகள் $-1, -1, -\frac{1}{6}, -\frac{8}{6}, \frac{23}{6}$, 0 ஆகும்.

எனவே $k = 4$ என்று தீர்மானிக்கிறோம். x_{i4}-களைக் கணக்கிட்டு x_{i0}/x_{i4}-களை $x_{i4} > 0, i = 2, 3$ என்ற அடிக்குறிகளுக்குக்கண்டு $l = 2$ என்று தீர்மானிக்கிறோம். எனவே x_8 நீக்கப்பட்டு x_4 அடிப்படை

யில் புகுத்தப்படுகிறது. மைய உறுப்பு $x_{24} = \frac{10}{6}$ ஆகும். முன் போலவே மாறிகளின் புதிய மதிப்புகளையும் புதிய U-வையும் காண்கிறோம். இது அட்டவணை (7.3)-ன் மூன்றாவது நிலையாகும்.

மூன்றாவது நிலையிலும் $x_{11} = -\frac{71}{10} < 0$ என்பதால் திரும்பவும் பகுதி I-க்கான கணக்கீடுகள் தொடரப்படுகின்றன.

கணக்கீடுகளைப் பகுதி I - படி 1 - ல் தொடங்குகிறோம். $x_{11} = x_{m+n+2} = -13 < 0$ என்பதால்

$$\delta_j = U_5 \overline{A_j} \quad , j = 1, 2, \ldots, 6$$

என்பவற்றைக் கணக்கிடுகிறோம். இவை முறையே —1, —1, —1 —3, 8, —5 ஆகின்றன.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\delta_4 = U_5 \overline{A_4} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= 0\times(-1) + 0\times 2 + 0\times 2 + 0\times 0 + 1\times(-3)$$
$$= -3$$

ஆகும். இதே போன்று மற்றவைகளையும் கணக்கிடலாம்,

இனி படி. 2க்குச் செல்கிறோம். சில j-மதிப்புகளுக்கு $\delta_j < 0$ என்று இருப்பதால் $\underset{j}{\text{மீச்சிறுமம்}} (\delta_j)$-ஐக் காண்கிறோம். இது $j = 6$ என்னும்போது கிடைக்கிறது. எனவே $k = 6$, $\delta_6 = -3 = \underset{j}{\text{மீச்சிறுமம்}} (\delta_j)$

இனி படி-3 க்குப் போகவேண்டும். x_{ik}-களைக் கணக்கிட வேண்டும். $k = 6$ என்பதால்

$$x_{ik} = U_i \overline{A_k} \quad , i = 1, 2, \ldots 5$$

என்ற வாய்ப்பாடிலிருந்து

$x_{16}, x_{26}, x_{36}, x_{46}, x_{56}$ என்பவை

முறையே

—2, 1, 6, 0, 5

என்று அறிகிறோம். எடுத்துக் காட்டாக,

$$x_{36} = U_3 \overline{A_6} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \times (-2) + 0 \times 1 + 1 \times 6 + 0 \times 0 + 0 \times (-5)$$
$$= 6$$

இந்த நிலையில் $k = 1, l = 1$ என்று கிடைக்கின்றன. எனவே x_7 அடிப்படையிலிருந்து நீக்கப்பட்டு x_1 உட்புகுத்தப் படவேண்டும். இந்த மாற்றத்திஞல் அட்டவணை (7.3)-ன் நான்காவது நிலை கிடைக்கிறது. இந்த நிலையில் $x_{11} = x_{n+m+2} = 0$ என்று இருப்ப தால் கணக்கீட்டின் பகுதி II-ஐத் தொடர வேண்டும். கொடுக்கப் பட்ட பிரச்சினையின் செய்தக்க தீர்வு கிடைத்து விட்டது.

$$x_1 = \frac{71}{10}, \quad x_4 = \frac{13}{10}, \quad x_6 = \frac{4}{10}, \; x_2 = x_3 = x_5 = 0.$$

பகுதி II-ன் படி 1-ல் $\gamma_j = U_{m+1}\overline{A_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ கணக்கிடப்பட வேண்டும். நமது கணக்கில் $n = 6$, $m = 3$ என்பதால் $\gamma_j = U_4 \overline{A_j}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$ காணப்படவேண்டும். இங்கு U நான்காம் நிலை யில் குறிப்பிட்டவாறு எடுத்துக்கொள்ளப்பட வேண்டும். γ_j-க்களின் மதிப்புகள் முறையே $0, \frac{8}{10}, \frac{7}{10}, 0, \frac{21}{10}, 0$ என்று ஆகின்றன. எடுத்துக் காட்டாக,

$$\gamma_3 = U_4 \overline{A_3} = \left(-1 \quad -\frac{2}{10} \quad -\frac{3}{10} \quad 1 \quad 0\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \times 0 + \left(-\frac{2}{10}\right) \times 0 + \left(-\frac{3}{10}\right) \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times (-1)$$

$$= -\frac{3}{10} + 1 = \frac{7}{10}$$

γ_j-க்களைக் கண்டபிறகு பகுதி II படி 2-க்குச் செல்ல வேண்டும். அனைத்து j-க்கும் $\gamma_j > 0$ என்று இருப்பதால் $x_{10} = x_{n+m+1}$ தன் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கிறது. எனவே, மீச்சிறுமப் படுத்தவேண்டிய நமது பிரச்சினைக்கான தீர்வு x_{10}-ன் மீப்பெரு மதிப்பின் குறியைமாற்றி எழுதிஞல் $\frac{71}{10}$ என்று கிடைக்

கிறது. இம்மீச்சிறு மதிப்பைக் கொடுக்கும் தீர்வு $x_1 = \frac{71}{10}$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = \frac{13}{10}$, $x_6 = \frac{4}{10}$ ஆகும். இனி கணக்கீடுகளைத் தொடரத் தேவையில்லை.

(இ) தன்மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பு முறை :

§ 7.3-ன் குறியீட்டில் $m = 3$ என்பதால்

$$V_5 = (0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1).$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$U_5^{(0)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

இந்தநிலையில் $\delta_j = U_5^{(0)} \overline{A_j}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$ என்பன முறையே $-1, -1, -1, -3, 8, -5$ ஆகும். δ_6 மிகக் குறையானது என்பதால் $k = 6$ ஆகும்.

$$X_6^{(0)} = E_0 \overline{A_6} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$X_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix}$$

எனவே θ_0 = மீச்சிறுமம் $\left(\frac{3}{1}, \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6} = \frac{x_{36}}{x_{30}}$. ஆகவே, $l = 3$. மூன்றுவது நிரையின் மாறி x_9 நீக்கப்பட்டு x_6 உட்புகுத்தப் படுகிறது. மாற்றத்திற்கான எளிய அணி

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

இந்த மாற்றத்திஞல் கிடைக்கும் அடிப்படையின் தன்மாற்றை $\overset{(1)}{U}$ என்று குறித்தால்

$$\overset{(1)}{U_5} = [(V_5 E_1^l) E_0]$$

$$= \left(0 \quad 0 \quad \frac{5}{6} \quad 0 \quad 1\right) E_0$$

$$= \left(0 \quad 0 \quad \frac{5}{6} \quad 0 \quad 1\right)$$

இப்பொழுது $\delta_j = \overset{(1)}{U_5} \overline{A_j}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$ என்பவை -1, -1, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{8}{6}$, $\frac{23}{6}$, 0 என்றுகின்றன. இவற்றுள் மிகக் குறையானது δ_4 ஆகும். எனவே $k = 4$, x_4 அடிப்படையில் உட்புகுத்தப்படுகிறது. புது x_{i4}–களைக் கணக்கிடுகிருேம்.

$$\overset{(1)}{X_4} = [E_1^l(E_0 \overline{A_4})]$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{6} \\ \frac{10}{6} \\ \frac{2}{6} \\ 0 \\ -\frac{8}{6} \end{pmatrix}$$

மேலும் புதிய தீர்வு $\overset{(1)}{X_0}$ என்பதையும் $E_1^{l} \overset{(0)}{X_0}$ என்பதிலிருந்து

$$\overset{(1)}{X_0} = E_1^l \overset{(0)}{X_0} = \begin{pmatrix} \frac{40}{6} \\ \frac{13}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ -\frac{58}{6} \end{pmatrix}$$

மேலும், இந்நிலேயில், θ_0 மீச்சிறுமம் $\left(\frac{13}{10}, \frac{5}{2}\right) = \frac{13}{10} = \frac{x_{24}}{x_{20}}$ என்பதால் $l = 2$. அதாவது இரண்டாவது நிறையின் மாறி x_8 நீக்கப்படுகிறது. மாற்றத்திற்கான எளிய அணி

$$E_2{}^{I} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{10} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{10} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

இந்த மாற்றத்தினுல் கிடைக்கும் அடிப்படையின் தன்மாற்றை $U^{(2)}$ என்று குறித்தால்

$$U_5^{(2)} = \left\{\left[\left(V_5\, E_2{}^{I} \right) E_1{}^{I} \right] E_0 \right\} = \left\{ \left(0\ \frac{8}{10}\ 0\ 0\ 1\right) E_1{}^{I} \right\} E_0$$

$$= \left(0,\ \frac{8}{10}\ \frac{7}{10}\ 0\ \ 1 \right) E_0$$

$$= \left(0\ \ \frac{8}{10}\ \frac{7}{10}\ 0\ \ 1 \right)$$

இப்பொழுது $\delta_j = U_5^{(2)}\, \overline{A_j},\ j = 1, 2, \ldots, 6$ என்பவை $-1,\ -\frac{2}{10},\ -\frac{3}{10},\ 0,\ \frac{21}{10},\ 0$ என்ருகின்றன. இவற்றுள் மிகக் குறையானது δ_1 என்பதால் $k = 1$ ஆகும். எனவே x_1 அடிப்படையில் புகுத்தப்பட வேண்டும்.

$$X_1^{(2)} = \left\{ E_2{}^{I}\ \left(E_1{}^{I}\ \overline{A_1}\right) \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

புது x_{ik}-களைத் தருகின்றன. மேலும்

$$X_0^{(2)} = E_2{}^{I}\ X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{71}{10} \\ \frac{13}{10} \\ \frac{4}{10} \\ 0 \\ -\frac{71}{10} \end{pmatrix}$$

என்பது அடிப்படைத்தீர்வு ஆகும்.

இந்த நிலையில், θ_0 = மீச்சிறுமம் $(\frac{71}{10}) = \frac{71}{10} = \frac{x_{11}}{x_{10}}$

என்பதால் $l = 1$. அதாவது, முதல் நிரையில் உள்ள மாறி x_7 அடிப்படையிலிருந்து நீங்குகிறது. இந்த மாற்றத்திற்கான எளிய அணி

$$E_3^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ஆகும்,

இந்த மாற்றத்தினுல் கிடைக்கும் அடிப்படையின் தன்மாற்றத்தை $U^{(3)}$ என்று குறித்தால்,

$$U_5^{(3)} = \left\{\left[\left(V_5\,E_3^l\right) E_2^l\right] E_1^l\right\} E_0$$

$$= (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)\; E_2^l\, E_1^l\, E_0$$

$$= (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)\; E_1^l\, E_0$$

$$= (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)\; E_0$$

$$= (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$$

இப்பொழுது $\delta_j = U_5^{(3)} \overline{A}_j$, $j = 1, 2, \ldots, 6$ என்பவை எல்லாம் 0 ஆகின்றன. ஒரு δ_j-ம் குறையெண் அல்ல என்பதால் பகுதி I-ன் கணக்கீடுகளைத் தொடர முடியாது. ஆனுல் இதே சமயம் புதிய அடிப்படையின் தீர்வு $X_0^{(3)} = E_3^l X_0^{(2)}$ என்பது

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{71}{10} \\ \frac{13}{10} \\ \frac{4}{10} \\ 0 \\ -\frac{71}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{71}{10} \\ \frac{13}{10} \\ \frac{4}{10} \\ -\frac{71}{10} \\ 0 \end{pmatrix}$$

என்ருகிறது. இதிலிருந்து $x_{n+m+2} = x_{11} = 0$ என்று அறிகிறேம் எனவே, பகுதி II-க்கான கணக்கீடுகளைத் தொடங்கவேண்டும்.

படி 1-ல் $U_4^{(4)} \overline{A}_j = \gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, 6$ என்பவற்றைக் கணக்கிட வேண்டும். இதற்கு $V_4 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$ என்று கொண்டு முதலில்,

$$U_4^{(4)} = \{ [(V_4 E_3^l) E_2^l] E_1^l \} \; E_0$$
$$= [\{ (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) E_2^l \} E_1^l] E_0$$
$$= \left[\left(-1 \; -\frac{2}{10} \; 0 \;\; 1 \;\; 0 \right) E_1^l \right] E_0$$
$$= \left(-1 \; -\frac{2}{10} \; -\frac{3}{10} \; 1 \;\; 0 \right) E_0$$
$$= \left(-1 \; -\frac{2}{10} \; -\frac{3}{10} \; 1 \;\; 0 \right)$$

என்று காண்கிருேம்.

எனவே, $\gamma_j = U_{4(4)}, \overline{A}_j, j=1, 2, \ldots, 6$ என்பன முறையே 0, $\frac{8}{10}$ $\frac{7}{10}$, 0. $\frac{21}{10}$, 0 ஆகின்றன. அனைத்து j-க்கும் $\gamma_j > 0$ என்பதால், படி 2–ன் படித்தீர்வில் $x_{n+m+1} = x_{10}$ தன் மீப்பெரு மதிப்பைப் பெற்றிருக்கிறது. எனவே, $x_{10} = -\frac{71}{10}$ திருத்தப்பட்ட பிரச்சினைக்கான மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினையின் தீர்வு $x_1 = \frac{71}{10}, x_2 = x_3 = 0,$ $x_4 = \frac{13}{10}, x_5 = 0, x_6 = \frac{4}{10}$ என்றும் குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பு $-(-\frac{71}{10}) = \frac{71}{10}$ என்றும் கிடைக்கின்றன. கணக்கீடுகளைத் தொடரத் தேவையில்லை.

பயிற்சிகள்—பாடம் 7 *

(7·1) § 3.3-ல் கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டின் தீர்வை தன்மாற்று அணி, தன்மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பு ஆகிய இரு முறைகளிலும் காண்க. வழக்கமான சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் வெவ்வேறு படிகளுடன் இம்முறைகளின் வெவ்வேறு படிகளை ஒப்பு நோக்குக.

(7·2)
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_j > 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

* இப்பாடத்தின் கணக்கீட்டு முறைகள் பாடம் 3-ன் பயிற்சியில் கண்ட எல்லாக் கணக்குகளுக்கும் பொருந்தும்.

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4\text{-க்கு}$$

மீப்பெரு மதிப்பைத் தரும் தீர்வை (i) சாதாரண சிம்ப்ளக்ஸ் முறை; (ii) தன்மாற்று அணி முறை, (iii) தன் மாற்று அணியின் பெருக்கல் அமைப்பு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்திக் காண்க. (காஸ்)

$$(7.3)\quad \begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &< 3 \\ x_1 + x_2 &> 1 \\ -3x_1 + x_2 &< 3 \\ -3x_1 - 3x_2 &\leqslant 2 \\ x_1 \qquad &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$-x_1 + 2x_2$$

என்னும் சார்பை மீச்சிறுமப்படுத்தும் தீர்வைப் பயிற்சி (7.2)-ல் குறிப்பிடப்பட்ட மூன்று முறைகளிலும் பெறுக. (காஸ்)

8. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் கணக்கீடுகளுக்கான புரோகிராம்களின் நிருவாகம்

(Organization of LP Calculations)

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் கணக்கீடுகளுக்கு கம்ப்யூட்டரைப் பயன்படுத்தும் போது கருத்தில் கொள்ளவேண்டிய சில விஷயங்கள் இப்பாடத்தில் குறிப்பிடப்படுகின்றன. செய்முறை பயிற்சி இல்லாதவர்களும் புரிந்து கொள்ளக்கூடிய விவரங்கள் மட்டுமே தரப்படுகின்றன. இப்பாடத்தில் நான்கு பகுதிகளில் முறையே பிரச்சினைகளை அமைத்தல், உட்புகும் தகவல்கள், வெளி வரும் தகவல்கள், இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வின் பின்னுய்வு ஆகியவை பற்றிய குறிப்புகள் கொடுக்கப்படுகின்றன.

8.1 நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளை அமைத்தல் :

அறிமுகத்தில் (§**0.1**) கூறியபடி செயல்முறை ஆய்வில் (**Operations Research**) ஈடுபடும்போது நேரிடையாகவோ அல்லது மறை முகமாகவோ எந்தவொரு பிரச்சினைக்கும் உகந்தவாறு கணித மாதிரி அமைத்துக் கொள்ளவேண்டிய தேவை ஏற்படுகின்றது. இவை பொதுவாக நடைமுறையில் ஏற்படுகின்ற செயல் முறை களின் முக்கியப் பண்புகளை மாறிகளாகவும், அவை மாறுவதற் கான சட்ட திட்டங்களை இம்மாறிகள் நிறைவுசெய்யும் தகுந்தக் கட்டுப்பாடுகளாகவும் மாற்றிக்கொடுக்கின்றன. எனவே, கணித மாதிரிகளை அமைக்கும் போது நமது தேவைகளுக்குத் தகுந்த வாறும், கணித முறைகளைப் பயன்படுத்துவதற்கு ஏற்றவாறும் கட்டுப்பாடுகளை மெய்ம்மை நிலையில் இருந்து பெரிதும் வழுவாமல் தளர்த்தி அமைத்துக் கொள்கிறோம். தவிரவும், செயல் முறை ஆய்வுகளில் பிரச்சினையை அணுகுவதற்கு முன்னர் ஆய்வின் குறிக் கோள் அல்லது நோக்கம் என்ன வென்று தீர்மானித்துக் கொள்வது வழக்கம். ஆனல் கணிதவியல் நெறிப்படுத்தும் முறைகளைப் பயன்படுத்த விரும்பும் ஆய்வாளர் பிரச்சினைக்கானக் கட்டுப்பாடுகளை நன்கு உணர்ந்து தேர்ந்த பின்னரே குறிக்கோள்

சார்பை அமைத்துக் கொள்வது பயனுடையதாக விருக்கும். பிரச்சினைகளுக்கு வரம்பற்றத் தீர்வுகள் கிடைப்பதற்குப் பெரும் பாலும் குறிக்கோள் சார்பே காரணமாவதுணடு. கட்டுப்பாடு களிலிருந்தே உண்மையான மாறிகள் எவை என்றும், அவை எங்ஙனம் குறிக்கோள் சார்பில் பொருந்துகின்றன என்றும் கண்டறிய முடியும். சமன்பாட்டுக் கட்டுப் பாடுகளைவிட சமனிண்மைக் கட்டுப்பாடுகள் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டால் இறுதியில் பெறும் முடிவுகளும் சிறந்தவையாக அமையும்.

பிரச்சினையின் கணித மாதிரியை இயன்ற வரையில் தோராய மாக நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளில் நேரியப் பிரச்சினைகள் எளிதாகத் தீர்க்கப் படலாம் என்பதுடன் தீர்வின் விளக்கங்களும் அவற்றிற்கு எளிதாகக் கொடுக்க முடியும். இருப்பினும் சிற்சில சமயங்களில் நேரியவல்லாத பிரச்சினைகளையும் சமாளிக்க ஆய்வாளர் ஆயத்தமாகவே இருக்கவேண்டும். சில நேரியவல்லாத பிரச்சினைகளைப்பற்றி பாடம்-9, பாடம்-10 ஆகியவற்றில் விவரங் கள் தரப்பட்டுள்ளன.

எந்தப் பிரச்சினைக்கும் சில தனிச் சிறப்புப் பண்புகள் இருக்கலாம். சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக்கானப் பொதுச்சங்கேத மொழி, இவற்றை நேரிடையாக ஏற்றுத் தீர்வு காண்பதற்கான முறையில் அமைக்கப்படாமல் இருக்கலாம். இயன்றவரையில் பொதுப்படை யாக ஒரு சங்கேத மொழியை வைத்துக் கொண்டு அதற்கு ஏற்றவாறு கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினையைத் தோராயமாக மாற்றி அமைத்துக் கொள்வது நலமாகும். ஒவ்வொரு பிரச்சினைக்கும் தனித்தனியாகச் சங்கேத மொழிகள் எழுதப்படக்கூடும் என்றாலும், இதனால் மிகுந்த நேரம் வீணாகும். அணிகளின் தன் மாற்றுக் காண்பதே பிரச்சினை யின் சிக்கலான பகுதியாகும். பொதுச் சங்கேத மொழியில் தன் மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பில் தீர்வு காண்பதற்கான முறை எழு தப்பட்டுவிட்டால் அதுவே சிறப்புடையதாகவும், பயனுள்ளதாகவும், குறைந்த நேரத்தை எடுத்துக் கொள்வதாகவும் அமையும்.

போக்குவரத்துப் பிரச்சினை இதற்கு விதி விலக்காகும். பொது சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக்கான சங்கேத மொழியை விட போக்குவரத்துப் பிரச்சினைக்காக எழுதப்படும் சங்கேதமொழி மிகவும் பயனுடையது. எந்தக் கம்ப்யூட்டரிலும் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண முயலும்போது குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள நிரை களுக்குமேல் சங்கேத மொழி ஏற்காது. ஆனால் சாதாரண நெறிப் படுத்தும் பிரச்சினையைப் போக்குவரத்துப் பிரச்சினையாக மாற்றி

எழுதும் போது இந்த நிரைகளின் எண்ணிக்கை கணிசமான அளவில் அதிகரிக்கின்றது. (§ 5·2-ன் இறுதியில் இது விளக்கப் பட்டது.)

நேரிய நெறிப்படுத்தும் முறைக்கான கணித மாதிரி அமைப் பதில் ஏற்படும் சிக்கல்களையும் அவற்றைத் தவிர்க்கும் முறைகளையும் மூன்று பிரிவுகளில் ஆராயலாம்: (i) தொழில் நுணுக்கம். (ii) செலவுகள் (iii) வலப்புறங்கள். பின்னர் அணியைச் சுருக்கும் முறைகள், அலகுகளை நிர்ணயித்தல், கேடுறு நிலை ஆகியவைபற்றிய குறிப்புகள் தனியே தரப்படுகின்றன.

(i) **தொழில் நுணுக்கம்** : பிரச்சினைக்கு ஏற்றவாறு கணித மாதிரியின் குறிக்கோளும், அதை அடைவதற்கான வழிமுறைகளும் வரையறுக்கப்பட வேண்டும். எல்லா வினுக்களுக்கும் திருப்திகர மாக விடையளிக்கக்கூடிய கணித மாதிரி எப்போதும் அமைவ தில்லை. தேவையான பிரச்சினைகளுக்கு மட்டுமே இடமளித்தால் கம்ப்யூட்டரின் நேரமும் ஆய்வாளரின் நேரமும் வீணாகாது. உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டுக்கான பிரச்சினைகளை ஆராயும்போது, எடுத்துக்காட்டாக, இயந்திர அமைப்பில் மாறுதல்கள் தேவையா? நடைமுறைக் கட்டுப்பாடுகள் உற்பத்தியைப் பாதிக்கின்றனவா? கணித மாதிரியில் பருவகால உற்பத்தித் தேவைகளின் மாறுதல் களை ஆராய வசதிகள் உள்ளனவா ? போன்ற வினுக்களை ஆராயலாம்.

கணித மாதிரியின் உயிர் நாடி, மாறிகள் நிறைவு செய்யும் கட்டுப்பாடுகளே. இவை பலவகைப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, கச்சாப்பொருள்கள் கிடைக்கும் வாய்ப்புகளைப்பற்றி, இயந்திரம், கிடங்குகள், போக்குவரத்துச் சாதனங்கள், மனித உழைப்பு இவற்றின் ஆற்றல்பற்றி, மாறிகளின் தன்மைகள்பற்றி விற்பனைத் தேவைகள்பற்றி, அல்லது ஒரு பருவகாலத்திற்கும் மற்றொரு பருவ காலத்திற்கும் உள்ள தொடர்ச்சியைப்பற்றி விவரிக்கக்கூடியன வாகக் கட்டுப்பாடுகள் அமையலாம். கட்டுப்பாடுகளை அமைக்கும் போது கணித அறிவோடு பிரச்சினை சார்ந்த துறையின் நுணுக்கங் களும் சிறப்பியல்புகளும் தெரிந்திருத்தல் இன்றியமையாதது.

நிரைகளையும் அவற்றின் அளவை காணும் அலகுகளையும் தீர்மானித்த பின்னர் செயல் முறைகளை வரையறுப்பதில் எந்தச் சிக்கலும் இருக்க நியாயமில்லை. செயல்முறைகள் ஒவ்வொன்றும், ஒரேவொரு எளிதில் வரையறுக்கப்பட்ட செலவோடு மட்டும் தொடர்புள்ளதாக இருக்குமாறு பார்த்துக் கொள்வது நல்லது.

தொடர்ச் செயல் முறைகள் அல்லது கூட்டுச்செயல் முறைகள் தொல்லை தருவனவாகும். கணக்கீடுகள் செய்வதற்கு உகந்தவாறு அணியைச் சுருக்க வேண்டிய நிலை வரலாம். இது தனியாகப்பின்னர் விவரிக்கப்படுகிறது.

(ii) **செலவுகள்:** ஒரு செயல் முறையின் மட்டத்தை (level of activity) ஓரலகு உயர்த்துவதற்குத் தேவையானஉபரிச்செலவை அதன் எல்லையுறு செலவு (marginal cost) என்று கூறுகிறோம். இதுவே அதனுடைய உண்மைச் செலவு நிலையையும் புலப்படுத்து வதாக அமையும். நேரிடையாக இதைக் காண்பது என்பது இயலாது. நடைமுறையில் மொத்தச் செலவையும், உற்பத்திக்கான நிலையான செலவையும் கூட்டி அதன் சராசரியாக இது கணக் கிடப்படுகிறது. ஒவ்வொரு செயல் முறைக்குமான செலவுக் கான மதிப்பீடு காண மொத்தச்செலவை வெவ்வேறு கூறுகளாகப் பகுத்து ஆராயவேண்டிய தேவையும், கணிதமாதிரியில் குறித்த படி செயல் முறையின் மட்டத்தை மாற்றும்போது ஒவ்வொரு செலவுக்கூறும் எத்துணை அளவு மாறக்கூடியது என்பதைக் கண்டறிய வேண்டிய தேவையும் ஆய்வாளருக்கு ஏற்படலாம். நீண்ட காலத்திற்கான திட்டத்தைக் கொடுக்கும் மாதிரிகளில் சரக்கின் கொள்ளிடத்தை (Capacity) அதிகரிக்க வேண்டிய தேவையும் ஏற்படலாம். இதற்காக ஆகும்செலவுகள் உற்பத்திச் செலவுகளுடன் எந்த அளவு தொடர்புபெற்றுள்ளன என்பதை யும் காணவேண்டி நேரிடலாம். உபரிக் கொள்ளிடத்திடற்காக ஏற்கப்படும் நிரந்தர ஏற்பாட்டுச் செலவுகள் இதற்கான செயல் முறைகளுடன் தொடர்பு படுத்தப்பட வேண்டுமேயல்லாது உற் பத்திச்செயல் முறைகளுடன் அல்ல.

(iii) **வலது புறங்கள்:** இவை பொதுவாகக் கிடைக்கும் வாய்ப்புகள், தேவைகள், பண்புகள் ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. தொடர்ச்சி சமன்பாடு மூலமாக ஏதாவது ஒரு கிடைக்கும் வாய்ப் புத் தெரிவிக்கப்பட்டிருந்தால் கிடைக்கும் அளவு குறையெண்ணகக் குறிக்கப்படுகிறது. பல்வேறு கால இடைவெளிக்கான மாதிரிகளில் வலதுபுறங்களை அமைப்பதில் எச்சரிக்கையாக இருக்கவேண்டும். துணையலகு நெறிப்படுத்துதலுக்கும் ஏற்றவாறு இவை அமைக்கப் படவேண்டும்.

அணியைச் சுருக்கும் முறைகள்:

சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையிலோ அல்லது மாறிகளின் எண்ணிக்கையிலோ சிக்கனம் செய்யவேண்டும் என்பதற்காகச் செயற்கையான முயற்சிகளில் ஈடுபடக்கூடாது. இயற்கையாக

எத்துணை மாறிகளும் சமன்பாடுகளும் அமைக்கின்றவோ அவற்றையே கொண்டு அணியை அமைக்கவேண்டும். புரோகிராமின் சங்கேத மொழி அதிகமான சமன்பாடுகளை ஏற்பதாக இருந்தாலும், இயற்கையாக அமைந்த சமன்பாடுகளை மட்டும் கொண்டே (கூடுதலான கட்டுப்பாடுகளை அமைத்துக்கொள்ளாமல்) தீர்வு காண்பது நலம்.

பின்வரும் முறைகளில் அணியைச் சுருக்க வாய்ப்புகள் உண்டு:

(அ) தனிச்செயல் முறைகளைக் குறிப்பிடாமல் ஒருமித்த செயல்முறைகளைக் குறிக்க மாறிகளை வரையறுத்துக் கொண்டு சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்கலாம். குறிப்பாக, கூருக்கச் சிதைவு நெறிப்படுத்தும் முறையில் இது பயன்படுகிறது. (§10.4 பார்க்கவும்)

(ஆ) கட்டுப்பாடுகளில்.

$$x_T = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

என்ற சமன்பாடு இருப்பதாகக் கொள்வோம். a_i-கள் என்ற எல்லாம் மிகைஎண்கள் என்னும்போது x_T குறையாக மாறுவதைத் தடுப்பதற்காக இக்கட்டுப்பாடு தேவையாக இராது. எனவே, பிரச்சினையின் இதர கட்டுப்பாடுகளில் x_T-க்கு மேற்கூறிய சமன்பாட்டின் வலதுபுறத்தை ஈடு செய்தால் ஒரு மாறியும் ஒரு சமன்பாடும் அணியிலிருந்து நீக்கப்படலாம். ஆனால் சிறுபிரச்சினைகளில் இந்த முறையால் x_T நீக்கப்படும் போது அவற்றின் இயற்கைத் தன்மை பாதிக்கப்பட்டுவிடும். மேலும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கட்டுப்பாடுகளில் x_T வந்தால் பல பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளும் x_T-ஐ நீக்குவதன் காரணமாக உட்புகுத்தப்பட்டுவிடும். பொதுவாக இந்நிகழ்ச்சி விரும்பத் தக்கதல்ல. கம்ப்யூட்டர்களில் பிரச்சினைக்குத் தீர்வுகாணும்போது அதற்காக ஆகும் நேரம் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையின் முப்படிக்கு ஏற்ப அதிகரிப்பதால் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைப்பது முக்கியமான தேவையாகக் கருதப்படுகிறது.

(இ) சந்தைகள் அளவுக்கு உட்பட்டு இருப்பதால் ஒரே இடத்தில் அளவுக்கு ஏற்றவாறு பொருள்கள் விற்பனையில் விலைமாருட்டம் ஏற்படலாம். இந்நிலைகளில் சில மேல் வரம்புக் கட்டுப்பாடுகளை வரையறை செய்து கொள்ள வேண்டும்.

(ஈ) பல காலப் பிரிவுகளைக் கொண்ட மாதிரிகளில் சமன்பாடுகள் அல்லது மாறிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறைக்க முடி

யாமல் போகலாம். ஆனால் பிரச்சினைக்கு ஏற்ற வகையில் திறம் படக் கட்டுப்பாடுகளை அமைத்துக் கொள்வதால் பூச்சியமல்லாத கெழுக்களின் எண்ணிக்கையைக் கணிசமாகக் குறைக்க முடியும்.

அலகுகள்: அணியைப்பற்றிய முடிவு எடுத்த பின்னர் செயல் முறைகளையும், மாறிகளையும் அளப்பதற்கான அலகுகளை நிர்ண யிக்க வேண்டும். அணியின் பூச்சியமல்லாத கெழுக்கள் தோராய மாக ஒன்று என்று ஆகுமாறு அலகை நிர்ணயிக்க முடிந்தால் தீர்வு காண்பது எளிதாகலாம். மிகப் பெரிய கெழுக்களும், மிகச் சிறிய கெழுக்களும் ஒருங்கே அணியில் இருந்தால் புரோகிராம் செயல்படும் வேகம் வெகுவாகத் தடைபடும். சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் புரோகிராமைத் திருப்பும் போது மிகக்குறையான கெழுப்பெற்ற மாறியையே அடிப்படையில் உட்புகுத்துவதற்குக் குறிக்கோள் சார் பிலிருந்து தேர்ந்து எடுக்கிறோம் என்பது நினைவிருக்கலாம். கிராம் களில் அளக்க வேண்டிய மாறிகளை கிலோ கிராம்களிலோ அல்லது மில்லி கிராம்களிலோ அளந்தால் எண்களின் சமநிலை எய்தப் பட்டாலும் குறிக்கோள் சார்பில் மாறிகளின் ஓரலகு மாற்றத்தினால் பெரும் வேறுபாடுகள் ஏற்படலாம். அதிக நேரம் செலவு செய்தே இத்தகு வேறுபாடுகளைப் பெறும் மாறிகளை அடிப்படையில் கொண்டு வர முடியும். சில கணிதவியல் புரோகிராம்களில் அலகுகள் நிர் ணயிப்பதும் ஓர் அங்கமாகவே சேர்க்கப் பட்டுள்ளது. எடுத்துக் காட்டாக சில புரோகிராம்களில் அணியின் நிரை ஒவ்வொன்றும் தகுந்த மாறிலியால் பெருக்கப்பட்டு கெழுக்களின் மட்டு மதிப்புகள் ஒன்றுக்கு மேற்படாமல் மாற்றியமைக்கப்படுகின்றன. இறுதியில் புரோகிராமின் மூலமாகவே அவற்றின் உண்மை மதிப்புகள் பழைய அலகுகளில் மாற்றப்பட்டு அறியப்படும் வகையில் சங்கேத மொழி எழுதப்படுகிறது.

கேடுறு நிலை: கேடுறு நிலைகளில் கம்ப்யூட்டர் சங்கேத மொழி சரியான முறையில் இயங்குமாறு எழுதப்பட்டிருக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக முழுவதும் தொய்வு மாறிகளைக் கொண்ட அடிப்படை வலது புறத்தில் நூற்றுக்கணக்கான பூச்சியங்கள் வரும்போது மிகவும் கேடுற்ற நிலையை ஏற்படுத்தும். செய்தக்க தன்மைக்கு ஊறு இல்லாத வகையில் வலது புறங்களுக்கு சிறு மதிப்புகளைக் கொடுத்து புரோகிராமைத் திருப்புவதால் இக் கேடுறு நிலையை ஓரளவு நீக்கலாம்.

8.2 புரோகிராம்களில் உட்புகும் தகவல்கள் :

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை அமைத்த பிறகு அதைக் கம்ப்யூட்டரில் செலுத்த வேண்டும். காகித நாடாக்கள் (Paper

tapes) அல்லது அட்டைகளில் (cards) கெழுக்களைக் குறிப்பது நேரிடையான முறை. பிரச்சினையின் வெவ்வேறு பகுதிகளை முறை யாகக் கம்ப்யூட்டரில் செலுத்துவதற்கான வழிமுறைகள் ஈண்டு வரையறுக்கப்படுகின்றன. பல பெரிய பிரச்சினைகளில் சிக்கலான இயந்திரங்களின் உதவியுடன் ஆராயக்கூடிய திட்டவட்டமான பொது வழிமுறைகள் இல்லா விட்டால் பிரச்சினை எளிமையாக்கப் படுவதற்கு மாறாக மேலும் கடினமாக மாறுவதற்கு வாய்ப்பு உண்டாகி விடுகிறது. தற்காலத்தில் காந்த நாடாக்கள் (magnetic tapes) பயன்படுத்தப் படுவதால் இம்மாதிரி வழிமுறைகளும் கம்ப் யூட்டர் புரோகிராமின் ஓர் அங்கமாகவே மதிக்கப்படுகின்றன. பிரச்சினையின் அணியை அட்டைகளில் குறித்தால் அணிப்பிறப்பி (matrix generator) புரோகிராமினைச் சரிப்பார்ப்பது எளிதாக விருக்கும்.

அணிப்பிறப்பி புரோகிராம் எல்லா விடத்தும் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதில்லை. அடிப்படையில் இது பிரச்சினையின் அமைப்பை மாற்றுவதாகும். பிரச்சினையின் கணித மாதிரியில் நாம் ஏதோ வொரு முறையில் கெழுக்களை எழுதியிருப்போம். இதைத்திட்ட அமைப்பிற்கு (standard form) மாற்றுவதே அணிப்பிறப்பி புரோ கிராமின் முக்கியக் குறிக்கோளாகும். எடுத்துக்காட்டாக, நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை முதன் முறையாக அணுகும் பலர் செயல் முறைகளை விடச் சமன்பாடுகளுக்கு முதலிடம் தர நினைப்ப தால் ஒரு சமன்பாட்டின் கெழுக்கள் யாவற்றையும் ஒன்று சேர வைப்பதற்கு முயல்வாரே யல்லாமல் ஒரே மாறியின் கெழுக்களை ஒன்றுசேர வைப்பதற்கு முயல்வதில்லை. ஆனால் அனுபவமுடைய வர்கள் பிரச்சினையின் தீர்வு காணும்போது சமன்பாடுகளைக் கூட்டிக் குறைப்பதைவிட செயல்முறைகளைச் சேர்ப்பது அல்லது நீக்குவதே தேவைப்படுகிறது என்பதை உணர்ந்திருப்பார்கள். எனவே, அணியைப் பிறப்பிக்கும் போது நேரிடையாகவே செயல் முறைகளை நிரைகளில் கொண்டுவருவது சிறந்ததாகும். இது எளிதல்ல என்று நினைத்தால் சமன்பாடுகளைக் கணித அமைப்பி லேயே ஏற்றுப் பின்னர் நிரைகளை நிரல்களாக மாற்றுவதற்கும் புரோகிராமிலேயே வழிவகுக்கப் படவேண்டும்.

எல்லாப் பிரச்சினைகளுக்கும் பொதுவாக ஓர் அணிப்பிறப்பிப் புரோகிராமை வரைவது முடியாது. ஆனால் ஓரலகு அணியின் கெழுக்கள் சாதாரணமாக, தானியங்கு முறையில் பிறப்பிக்கப் படுகின்றன. மற்ற கெழுக்களின் எண்மதிப்புகளும், அவை பல இடங்களில் பயன்படுத்தப் பட்டாலும் ஒரேவொரு முறைதான் அணிப் பிறப்பிக்கான தகவல்களில் குறிக்கப்படும். அலகுகளை

மாற்றுதல் அல்லது தலைகீழ் எண்ணுகை மாற்றுவது போன்ற சிறு கணக்கீடுகளை அணிப்பிறப்பிப் புரோகிராமிலேயே சேர்த்து விடலாம்.

செலவுக் கெழுக்களின் கூட்டல், வரிச்சலுகைகள், அந்நியச் செலாவணி ஆகியவற்றிற்கான திருத்தங்கள் செய்தல், பல கால இடைவெளி மாதிரிகளில் தகுந்த தள்ளுபடிகள் செய்து உண்மை மதிப்புகளை அறிதல் போன்ற கணக்கீடுகளையும் அணிப்பிறப்பி புரோகிராமிலேயே சேர்த்துக் கொள்வதுமுண்டு.

எழுதிய புரோகிராமை மாற்றுமல் தகவல்களை மட்டும் மாற்றி யமைத்து பல்வேறு பிரச்சினைகளைத் தீர்ப்பதற்கு அதைப் பயன் படுத்தலாம். ஆனல், அதே போழ்து தேவையற்ற அல்லது அடிக்கடி நிகழக் கூடிய வாய்ப்பில்லாத நிகழ்ச்சிக்களுக்காகப் புரோகிராமை மிகவும் விரிவுப்படுத்தி எழுதத் தேவையில்லை. இம் மாதிரி நிகழ்ச்சிகள் ஏற்படின், அவற்றைப் பற்றிய ஆராய்ச்சி உண்மையிலேயே தேவைப்பட்டால் அதற்கேற்ப புரோகிராமை மாற்றியமைத்துக் கொள்வது நலம்.

புரோகிராம்கள் வரையும்போது அதனுல் பிறப்பிக்கப்பட்ட அணியைத் திருத்தி அமைப்பதற்கும் வழிவகுக்கப் படவேண்டும். வலப்புறங்களை மாற்றியமைக்கவும் அல்லது சில கெழுக்களை நீக்கி அந்த விடத்து வேறு கெழுக்களை ஈடு செய்யவும் அல்லது மற்ற நிரைகளின் நேரியச் சேர்க்கையாக ஒரு புதிய செலவு நிரையை எழுதவும் வழிமுறைகள் அமைக்கப் பட்டால் புரோகிராம் பயனுடையதாக விருக்கும்.

மாறிகளுக்கும், கட்டுப்பாடுகளுக்கும் அதாவது அணியின் நிரல்களுக்கும், நிரைகளுக்கும், குறியீட்டு எண்கள் வரிசையாகக் கொடுக்கப்படுகின்றன. இம்மாதிரிக் குறியீடுகள் கொடுக்கப்படு வதால் பிரச்சினையை விரிவுப் படுத்தும்போதும் அணியைத் திருத்தியமைக்கும் போதும் சில பயன்கள் கிடைக்கின்றன. தவிரவும், கம்ப்யூட்டரிலிருந்து வெளிவரும் தகவல்களை ஆராய் வதிலும் இவை உதவி புரிகின்றன.

கணக்கீடுகளைச் செய்வதில் கம்யூட்டர்கள் மிகவும் பயன் படுவது போலவே நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்காக எழுதப் படும் புரோகிராம்களும் உட்புகும் தகவல்களை ஒழுங்கு சேர இணைத்துச் செலுத்துவதற்கும், வெளிவரும் தகவல்களையும், கணக் கீடுகளையும் செம்மைப்படுத்தி அறிக்கையாக அமைத்துக் கொடுப் பதில் பெரிதும் துணை புரிகின்றன. இத்தகு புரோகிராம்களின்

கணக்கீடுகள் இருவகைப்படும்: (i) உற்பத்தியின் அடிப்படையில் ஆறு அல்லது மூன்று மாதங்களுக்கொரு முறையும் அல்லது இன்னமும் குறைந்த காலப்பிரிவிலோ செயற்படுத்தப்பட்டு அடுத்து வரும் காலப்பிரிவிற்கான திட்டத்தைக் கொடுப்பவை. (ii) ஆய்வின் அடிப்படையில் தொழில் நிர்வாகத்தின் வெவ்வேறு முறைகளின் அனுகூலங்களை ஒப்பு நோக்குவதற்கான ஒரேவொரு தடவை மட்டும் செயல்படுத்தப்பட்டுப் பின்னர் செயல்படுத்தத் தேவையில்லாத கணக்கீடுகளைக் கொடுப்பவை. எந்த வகையைச் சார்ந்தவையானாலும் இக்கணக்கீடுகளை ஒழுங்காகச் செய்து அறிக்கை (report) உருவில் அமைத்துத்தரும் சிறப்புக் கம்யூட்டர் புரோகிராம்கள் (special computer programs) பல்வேறு காரணங்களுக்காக தேவைப்படுகின்றன. இத்தகைய சிறப்புப் புரோகிராம்கள் எழுதப்படவில்லை என்றால் தற்செயலாக விடுபட்ட சில கட்டுப்பாடுகளை உட்புகுத்தும் போதும், எதிர்பாராமல் நேர்ந்துவிட்ட தட்டச்சுப் பிழைகள் அல்லது கணக்கீட்டுப் பிழைகளைத் திருத்த முயலும் போதும் அணிப்பிறப்பிப் புரோகிராமைத் திரும்பத் திரும்ப ஓட்ட வேண்டிய நிலையில் இடர்ப்பாடுகள் ஏற்படலாம்.

8·3. புரோகிராம்களிலிருந்து வெளிவரும் தகவல்கள்:

நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை அமைத்து அதைக் கம்ப்யூட்டரில் நேரிய சங்கேதமொழிக்கேற்ப மாற்றியமைத்துத் தகவல்களைக் கம்ப்யூட்டரில் செலுத்துவதோடு ஆய்வாளரின் பணிமுடிந்து விடாது. கம்ப்யூட்டர் வெளிவிடும் தகவல்களை ஒழுங்காகப் பட்டியல் படுத்தி, பின்னர் அவற்றிலிருந்து உரிய பயனைப் பெறுவதற்கு ஏற்ற வகையில் தொகுத்துத் தருதல் வேண்டும்.

ஆய்வாளருக்குத் தகவல்கள் பின்வருமாறு கம்ப்யூட்டரிலிருந்து கிடைக்குமானால் அனுகூலமாக இருக்கும்: (i) அடிப்படை மாறிகளின் பெயர்கள் அவற்றின் தொடக்க வரிசையில்; (ii) அடிப்படை மாறிகளின் மதிப்புகள்; (iii) நிரைகளின் (கட்டுப்பாடுகளின்) பெயர்கள்; (iv) இந்நிரைகளுக்கான மறைவுச் செலவுக் கெழுக்கள்; (v) இந்நிரைகளின் வலப்புறங்கள், தொடக்க நிலையில் இருந்தவாறு. இவற்றுள் அடிப்படை மாறிகளும் அவற்றின் மதிப்புகளும் ஏன் தேவைப்படுகின்றன என்று நாம் அறிவோம். மறைவுச்செலவுக் கெழுக்கள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதையும் முன்னரே கண்டோம். வலது புறங்களில் ஏற்படும் சிறு மாறுதல்களுக்கேற்ப செலவுச்சார்பின் மாறுதல்களைக் கண்டறிய இவை உதவுகின்றன.

தொடக்க நிலை வலப்புறத்தைச் சேர்த்துக் கொள்வது தேவையற்றதாகத் தோன்றலாம். ஆனால் அணி நாடாவில் பல வலப்

புறங்கள் இருக்கக் கூடுமாதலால் நமக்குத் தேவையான வலப்புறத்தைத்தான் பயன்படுத்திக் கொண்டிருக்கிறோம் என்பதை உறுதியாகத் தெரிந்து கொள்வதற்கும், தீர்வைப் புரிந்து கொள்ளவும், பிழைகள் இருப்பின் அவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும் இது தேவைப்படுகின்றது. ஆய்வாளருக்கு மேற்கூறிய தகவல்கள் போதுமானவையே என்றாலும் ஆய்வின் விளைவுகளைப்பயன்படுத்துவோர் தெளிவான ஓர் அறிக்கையைப்பெற விரும்புவது இயல்பே. தேவையான தகவல்களை சங்கேத மொழியில் இல்லாமல் சாதாரண மொழியிலேயே தரவல்ல சாதனங்களும் தேவைப்படுகின்றன. அறிக்கை எழுதும் சாதனங்களைப் பயன்படுத்தி, அதாவது, அறிக்கையின் அமைப்பைவரையறுக்கும் தொகுப்பு அட்டைகளைத்(compile cards) தயாரித்து இதைப் பெறுவது ஒரு முறை. சிக்கல் நீக்கி நாடா (unravel tape) எனப்படும் சிறப்பு நாடாவில் தீர்வின் விவரங்களைக் குறித்து அறிக்கையைத் தயாரிப்பதற்கு சிறப்புப் புரோகிராமைப் பயன்படுத்துவது இன்னொரு முறையாகும். முதல் முறையில் எளிய அறிக்கைகளைப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணும்போதே தயாரித்து விடலாம்.

உட்புகும் தகவல்களைத் தயாரிப்பதற்கு அணிப்பிறப்பியைப் பயன்படுத்தும்போது வெளிவரும் தகவல்களின் ஆய்வு ஓரளவு பாதிக்கப்படலாம். தனி அறிக்கைத் தயாரிக்கும் சாதனம் பயன்படுத்தப்பட்டால் அறிக்கை தொகுப்பதற்கான அட்டைகளைத் தோற்றுவிக்கும் வகையில் அணிப்பிறப்பிப் புரோகிராமை அமைக்கலாம்.

சில சங்கேத மொழிகளில் இறுதித்தீர்வில் உள்ள மாறிகளின் செலவுக்கெழுக்கள் தாமாகவே தானியங்கு முறையில் பெறப்படும் வகையில் வசதிகள் செய்யப்படுகின்றன. விடுபட்ட அணி மூலகங்களைக் கண்டு பிடிக்கவோ, பிழையான குறியுடனோ அல்லது மாறுபட்ட அலகிலோ அல்லது தவறான இடத்திலோ எழுதப்பட்டு விட்ட மூலகத்தைத் திருத்துவதற்கும் வழி முறைகள் புரோகிராமிலேயே சேர்த்துக் கொள்ளப்படலாம். சில புரோகிராம்களில் முழு அட்டவணையையோ அல்லது தேவையான அதன் சில நிரல்களையோ பெறுவதற்கும் வசதிகள் உள்ளன. கெழுக்கள் எந்த அளவிற்குத் துல்லியமாகக் கணக்கிடப்படவேண்டும் என்பதைக் காண்பதற்கும் சில புரோகிராம்களில் வசதிகள் உள்ளன.

8.4 இறுதிச்சிறப்புத் தீர்வின் பின்னாய்வு: (Post optimal Analysis)

நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வு காண்பது மட்டுமே நமது நோக்கமல்ல. அத்தீர்வைக் கொண்டு

அதிலுள்ள குறை-நிறைகளை ஆராய்ந்து கட்டுப்பாடுகளில் தகுந்த மாற்றங்கள் செய்து அல்லது குறிக்கோள் சார்பில் திருத்தங்கள் செய்து, மேலும் சிறந்த தீர்வினைக் காணமுடியுமா என்றும், முடியாது என்றால் ஏன் என்றும் அறிந்து கொள்ள முயற்சிக்கவேண்டும். நமக்குக் கிடைத்த தீர்வு அடிப்படையிலுள்ள சில மாறிகளை மட்டும் சார்ந்திருக்கிறது என்று நாம் அறிவோம். இதற்கான தகுந்த காரணங்கள் இருக்குமானால் அவற்றைக் கண்டறிய வேண்டும். தீர்வின் தன்மையைக் கொண்டு முக்கியமான கட்டுப்பாடுகள் விடுபட்டிருந்தாலும் அல்லது சில கட்டுப்பாடுகளைப் பிழைபட அமைத்திருந்தாலும் அல்லது கெழுக்கள் விடுபட்டோ அல்லது தவறான இடத்தில் குறிக்கப்பட்டோ இருந்தாலும் இவற்றை உய்த்துணர்ந்து தகுந்த திருத்தங்களைச் செய்ய வேண்டும்.

தீர்வு ஓரளவு சரியான நிலைமையைப் பிரதிபலிக்கிறது என்று நம்பிக்கையுடன் கூற முடிந்தால், வேறு சில தொடர்பான வினாக்களும் எழலாம். அடிப்படை மாறிகளின் மதிப்புகளுடன் கூட கட்டுப்பாடுகளுக்கான மறைவு செலவுக் கெழுக்களையும் பெறலாம். அடிப்படையல்லா மாறிகளின் குறைக்கப்பட்ட செலவுக்கெழுக்களையும் காணலாம். இச்செலவுகள் ஒவ்வொரு செயல் முறைக்குமான நேரிடைச் செலவு எந்த அளவுக்குக் குறைக்கப்பட்டால் அச்செயல் முறையில் ஈடுபடுவது இலாபகரமானது என்பதைக் குறிப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

துணையலகு நெறிப்படுத்துதலைப் பயன் படுத்த வேண்டிய நிலையில் இத்தகு பின்னாய்வுக்கான வசதிகளை முன்னரே புரோகிராமில் ஏற்படுத்திக் கொள்வது நலமாக விருக்கும். மேலும், சில மாறிகள் அடிப்படையில் வரத்தகுதியற்றவை என்பது போன்ற கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்டு வரும் போது அவற்றிற்கான செலவுக் கெழுக்களை நம் விருப்பப்படி பெரிய எண்ணாக மாற்றி எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

பின்னாய்வு பயனுடையதாக இருக்க வேண்டுமானால் கணித அறிவோடு ஆய்வாளர் பிரச்சினை எத்துறையைச் சார்ந்ததோ அத்துறையின் நெளிவு-சுளிவுகளையும் நன்கு அறிந்தவராக இருத்தல் இன்றியமையாதது.

9. இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை
(Quadratic Programming Problem)

9.1. கணிதவியல் நெறிப்படுத்துதல் - பொது அமைப்பு :
(Mathematical Programming – general form)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ என்ற மாறிகள் $g_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, i = 1, 2, \ldots, m$ என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ என்ற சார்பின் மீச்சிறு (மீப்பெரு) மதிப்புக் காண்பதைக் கணிதவியல் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான பொது அமைப்பு என்று வரையறுக்கிறோம். வெக்டர்கள் குறியீட்டில் இப்பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு கூறலாம் :

$g_i(X) \leqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots m)$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $f(X)$ என்னும் சார்பிற்கு மீச்சிறு (மீப்பெரு) மதிப்பு கொடுக்கும் தீர்வு $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - ஐக் காண்க.

சார்புகள் f, g_i என்பன மாறிகளில் ஒருபடிச்சார்புகள் அல்ல என்றால் நேரிய வல்லா (non-linear) நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை கிடைக்கிறது. முன்னரே §1·9-ல் குவிப்பிரச்சினைகளைப்பற்றி ஆராயும்போது குவிநெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை வரையறுக்கப் பட்டது. f, g_i எல்லாம் நேரிய (linear) ச்சார்புகள் என்று இருக்கும் போது $X \geqslant O$ என்பதும் உண்மையானால் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை கிடைக்கிறது.

இந்த பாடத்தில் கணிதவியல் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் ஒரு பிரிவாக இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை ஆராயப்படுகிறது. g_i-களை நேரியச் சார்புகளாகவும், f-ஐ இருபடிச்சார்பாகவும் எடுத்துக்கொண்டு $X \geqslant O$ என்ற கட்டுப்பாடுகளையும் புகுத்தி இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை அமைக்கின்றோம்.

9.2. இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை-வரையறை :

பின்வரும் பிரச்சினையை இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை என்று வரையறுக்கின்றோம் :

$$\begin{aligned} AX &= b \\ X &\geqslant O \end{aligned} \qquad (9\cdot1)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$f(X) = pX + X'CX \tag{9·2}$$

என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$p = (p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n) \tag{9·3}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

என்று கொள்கிறோம். X' என்பது X-ன் திருப்பு அணியாகும். a_{ij}, c_{ij}, p_j, b_i என்பன கொடுக்கப்பட்ட மாறிலிகள். மேலும் முன்பே கூறியபடி (§1·6) பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாமல் C–ஐச் சமச்சீர் அணியாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். §1·6–ல் வரையறுத்தபடி $X'CX$ அரையறுதி மிகை இருபடி அமைப்பு ஆகும். எனவே தேற்றம் (1·4)-ன் விளைவாக $X'CX$ ஒரு குவிச்சார்பாகும். pX–ம் குவிச்சார்பு என்பதால் $f(X)$ குவிச்சார்பாகும். $AX = b$ என்பன குவிச்சார்புக் கட்டுப்பாடுகள் என்பது தெளிவு. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினை குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் ஓரமைப்பே. (§1·9).

(9·1), (9·2)–களால் வரையறுக்கப்பட்டப் பிரச்சினையின் கட்டுப்பாட்டுச் சமன்பாடுகளை சமனின்மைகளாக மாற்றி அதைக் குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் திட்டவமைப்பிற்குக் கொண்டு வருவோம். கட்டுப்பாடுகள் (9·1)–ஐப் பின் வருமாறு எழுதுகிறோம்:

$$\left.\begin{aligned} AX - b &\leq O \\ -AX + b &\leq O \\ X &\geq O \end{aligned}\right\} \tag{9·4}$$

எனவே, இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை [(9·1), (9·2)-ல் கொடுக்கப்பட்டது] கட்டுப்பாடுகள் (9·4)-க்கு இணங்க (9·2) தரும் $f(X)$–ன் மீச்சிறு மதிப்புக் காண்கின்ற குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாறுகிறது. ஆகையால் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு காண இக்குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான தீர்வு காணல் வேண்டும்.

9·3 இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான தீர்வின் சில பண்புகள்

§ 9.2–ல் வரையறுக்கப்பட்ட குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு காண முதலில் கூஹ்ன்–டக்கர் கட்டுப்பாடுகளை எழுத வேண்டும். (9·4)–ன் முதலிரண்டு சமனின்மைகளின் லாக்ராஞ்சிப் பெருக்கிகள்

$$\left.\begin{aligned}\pi_1 &= (\pi_{11}, \pi_{12}, \ldots, \pi_{1m})\\ \pi_2 &= (\pi_{21}, \pi_{22}, \ldots, \pi_{2m})\end{aligned}\right\} \qquad (9{\cdot}5)$$

என்ற m-கூறுகளைக் கொண்ட நிரை வெக்டர்களை அமைக்கின்றன என்றால் பிரச்சினைக்கான லாக்ராஞ்சிச் சார்பு

$$F(X, \pi_1, \pi_2) = p\,X + X'\ CX\ + \pi_1\,(AX-b) + \pi_2\,(-\,AX + b) \qquad (9{\cdot}6)$$

என்று எழுதப்படலாம். x_j, π_{1i}, π_{2i}–களைப் பொறுத்து இச்சார்பின் வகைக் கெழுக்களைக் கண்டால்

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j}\,(X, \pi_1, \pi_2) &= p_j + 2\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, x_i + \sum_{i=1}^{m} \pi_{1i}\, a_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \pi_{2i}\, a_{ij}\\ \frac{\partial F}{\partial \pi_{1i}}\,(X, \pi_1, \pi_2) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - b_i\\ \frac{\partial F}{\partial \pi_{2i}}\,(X, \pi_1, \pi_2) &= -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + b_i\end{aligned}\right\} \qquad (9{\cdot}7)$$

$(i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n)$

என்று கிடைக்கின்றன. $\frac{\partial}{\partial X}\,(X'\,CX)$ என்பது, C சமச்சீர் அணி என்பதால், $2CX$ என்று எழுதப் பட்டுள்ளது. உறுப்புகளை ஒருங்கே சேர்த்து நிரல் வெக்டர்களாக சமன்பாடுகள் (9·7) - ஐ மாற்றினால்

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial X}\,(X, \pi_1, \pi_2) &= p' + 2CX + A'\ \pi_1' - A'\,\pi_2'\\ \frac{\partial F}{\partial \pi_1}\,(X, \pi_1, \pi_2) &= AX - b \qquad (9{\cdot}8)\\ \frac{\partial F}{\partial \pi_2}\,(X, \pi_1, \pi_2) &= -\,AX + b\end{aligned}$$

என்னும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. எனவே (1·32), (1)·37

கொடுக்கும் கூஹ்ன் - டக்கர் கட்டுப்பாடுகள் இப்பொழுது (9·8)-ஐப் பயன்படுத்தி,

$$p' + 2\,C\,X_0 + A'\,\pi_{10}' - A'\,\pi_{20}' \geqslant O \qquad (9{\cdot}9)$$

$$X_0'\,[p' + 2C\,X_0 + A'\,\pi_{10}' - A'\,\pi_{20}'] = 0 \qquad (9{\cdot}10)$$

$$X_0 \geqslant O \qquad (9{\cdot}11)$$

$$\begin{cases} AX_0 - b \leqslant O \\ -AX_0 + b \leqslant O \end{cases} \qquad (9{\cdot}12)$$

$$[\pi_{10}, \pi_{20}]\,[A\,X_0 - b, -AX_0 + b] = 0 \qquad (9{\cdot}13)$$

$$\begin{cases} \pi_{10} \geqslant O \\ \pi_{20} \geqslant O \end{cases} \qquad (9{\cdot}14)$$

என்று எழுதப்படலாம். இங்கு $(X_0, \pi_{10}, \pi_{20})$ கொடுத்துள்ள இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்குச் சரியான சேணப்புள்ளிப் பிரச்சினையின் தீர்வு ஆகும். சமனின்மைகள் (9·12) ஒருங்கே $A\,X_0 = b$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொடுக்கின்றன. சமன்பாடு (9.13) எப்பொழுதும் உண்மையாகும். ஏனெனில் அதை

$$(\pi_{10} - \pi_{20})\,(A\,X_0 - b) = 0$$

என்று எழுதலாம். சமனின்மைகள் (9.14)-இலிருந்து $(\pi_{10} - \pi_{20})' = \pi_0$ என்ற $m \times 1$ நிரல் வெக்டர் குறிக் கட்டுப்பாடில்லாத π_{i0} என்னும் பெருக்கிகள் அமைக்கும் வெக்டர் எனக் கொள்ளப்படலாம். எனவே, கட்டுப்பாடுகள் (9.9) — (9.14) சுருக்கப்பட்டு

$$p' + 2\,C\,X_0 + A'\,\pi_0 \geqslant O \qquad (9.15)$$

$$(X_0)'\,(p' + 2\,C\,X_0 + A'\,\pi_0) = 0 \qquad (9.16)$$

$$X_0 \geqslant O \qquad (9.17)$$

$$A\,X_0 = b \qquad (9.18)$$

$$(AX_0 - b)'\,\pi_0 = 0 \qquad (9.19)$$

π_0 குறிக் கட்டுப்பாடற்றது.

என்று எழுதப்படலாம். $u_{j0} \geqslant 0$ ($j = 1, 2, \ldots n$) என்னும் தொய்வு மாறிகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட நிரல் வெக்டரை U_0 என்று எடுத்துக் கொண்டு சமனின்மை (9.15)-ஐ,

$$p' + 2\,C\,X_0 + A'\,\pi_0 - I\,U_0 = O \qquad (9.20)$$

என்று எழுதலாம். அதாவது,

$$U_0 = p' + 2\,C\,X_0 + A'\,\pi_0$$

என்று கிடைக்கிறது. இதன் காரணமாக, (9.16)

$$(X_0)'\,U_0 = 0 \qquad (9.21)$$

என்று மாறுகிறது. மேலும் வரையறைப்படி

$$U_0 > O \qquad (9.22)$$

எனவே, கூஹ்ன்-டக்கர் கட்டுப்பாடுகள்(9.20) (9.21) (9.22) (9.17) (9.18) (9.19)-ஆகும். π_0 குறிக் கட்டுப்பாடற்றது.

குவி நெறிப்படுத்தும் பிரச்னை, சேணப்புள்ளிப் பிரச்னை ஆகியவற்றின் சமத்துவத்திற்கான கூஹ்ன்-டக்கர் தேற்றத்திலிருந்தும் [தேற்றம் (1.11), தேற்றம் (1.12)] மேலே கூறியவற்றிலிருந்தும் பின்வரும் தேற்றம் அமைக்கப்படுகிறது.

தேற்றம் (9.1) $X_0 \geqslant O$ என்னும் வெக்டர் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்குத் தீர்வாக அமைவதற்குத் தேவையானதும், போதுமானதுமான கட்டுப்பாடுகள் வருமாறு:

(i) $A\,X_0 = b$

(ii) $U_0 \geqslant O$, குறிக்கட்டுப் பாடற்ற π_0 என்ற வெக்டர்களை

$$p' + 2\,C\,X_0 + A'\,\pi_0 - I\,U_0 = O \qquad (9.20)$$

$$(X_0)'\,U_0 = 0$$

என்னும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காணமுடியும்.

இத்தேற்றத்தின் கட்டுப்பாடு (ii)-ல்முதலாவது நேரியச் சமன்பாடாகும். $(X_0)'\,U_0 = 0$ என்பதிலிருந்து $x_{j0} \geqslant 0,\ u_{j0} = 0,\ j = 1, 2, \ldots\ldots, n$ என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் ஒவ்வொரு j-க்கும்

$$x_{j0}\,u_{j0} = 0$$

என்பது உண்மையாகும். எனவே $x_{j0} > 0$ என்றால் $u_{j0} = 0$ என்றும் $u_{j0} > 0$ என்றால் $x_{j0} = 0$ என்றும் இருக்க வேண்டும்.

பிரச்சினையின் இந்த அமைப்பில் மொத்தம் $m + n$ நேரியக் கட்டுப்பாடுகள் உள்ளன. $A\,X_0 = b$ என்பதில் m கட்டுப்பாடுகளும் சமன்பாடு (9.20)-ல் n கட்டுப்பாடுகளும் இருக்கின்றன. X_0, U_0 என்ற $2\,n$ மாறிகள் குறையல்லாதவையாயும், குறிக்கட்டுப்பாடற்ற π_0 என்று m மாறிகளும் உள்ளன. எனவே X_0, U_0, π_0 என்னும் மாறிகள் மீச்சிறும(மீப்பெரும) த்திற்கான நிலையில் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன: (அடிக்குறி $_0$ விடப்பட்டுள்ளது).

$$\left.\begin{array}{l} A\,X = b \\ 2\,C\,X - I\,U + A'\,\pi = -p' \\ X \geqslant O;\ U \geqslant O \end{array}\right\} \qquad (9.21)$$

மேலும் $\sum_{j=1}^{n} x_j u_j = 0$ என்ற கட்டுப்பாடு

x_j, u_j, என்னும் $2n$ மாறிகளுள் உயர்ந்தது n மாறிகளே மிகை மதிப்புகளை ஏற்கலாம் என்பதைத் தெரிவிக்கிறது. எனவே, பிரச்சினையின் தீர்வுகள் X, U, π என்பனவற்றுள் $(n+m)$-க்கு மேற்படாத பூச்சியமல்லாத மாறிகளைக் கொண்டவையாகும். எனவே, தீர்வுக்கணம் கட்டுப்பாடுகள் (9.21)-ன் அடிப்படைத் தீர்வுகளைக் கொண்டதாகும்.

இந்தப் பண்புகளைப் பயன்படுத்த சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் அடிப்படையில் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்குப் பல்வேறு முறைகளில் தீர்வுகள் காணப்பட்டுள்ளன. அடுத்துவரும் பகுதிகளில் இரண்டு முறைகள் விவரிக்கப்படுகின்றன.

9.4. இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு காணல்—உல்ஃப் முறை :

உல்ஃப்பின் (Wolfe's) கணக்கீட்டின் முறை இரு அமைப்புகளைப் பெற்றது. சுருக்கப்பட்ட முதல் அமைப்பில் $p = O$ அல்லது $X' C X$ மிகையுறுதியானது என்று கொள்கிறோம். விரிவான இரண்டாவது அமைப்பில் $p \neq O$ அல்லது $X' C X$ மிகை அரையுறுதி யானது என்று கொள்கிறோம். இரண்டு அமைப்புகளிலும் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான தீர்வு நேரிய நெறிப்படுத்தும் ஒரு பிரச்சினைக்கானத் தீர்விலிருந்து சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படி பெறப்படுகிறது.

சுருங்கிய அமைப்பு : (Short form) இப்பொழுது $p = O$, அல்லது $X' C X$ மிகையுறுதியானது என்று கொள்கிறோம். தேற்றம் (9·1) லிருந்து $X > O$ என்னும் வெக்டர் தீர்வாக அமையப் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகள் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டும் என்று அறிகிறோம்:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & AX = b \\ (ii) & 2\,C\,X - IU + A'\,\pi = -\;p' \\ & X'\,U = 0 \end{array}\right\} \qquad (9.22)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்யுமாறு $U > O$, குறிக்கட்டுப் பாடற்ற π உள்ளன.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறைக்கான செயற்கை அடிப்படைக் கணக்கீட் டின்போது செய்தது போன்று தொடங்கி ஓர் அடிப்படைத் தீர் வைப்பெற முயற்சிக்கிறோம். வழக்கம்போல் $b \geqslant O$ என்று எடுத்

துக்கொள்ளலாம். [i-வது கட்டுப்பாட்டில் $b_i \leqslant 0$ என்று இருந்தால் இருபுறமும் (-1)-ஆல் பெருக்கித் திட்ட அமைப்பிற்குக் கொண்டு வரலாம்.]

$$W = (w_1, w_2, \ldots, w_m) > O$$
$$Z_1 = (z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n}) > O$$
$$Z_2 = (z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2n}) > O$$

என்ற குறையல்லாச் செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்தி (9.22)-ஐ

$$\left.\begin{aligned} AX \qquad\qquad + IW \qquad\qquad &= b \\ 2CX - IU + A'\pi + IZ_1 - IZ_2 &= -p' \\ X'U &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.23)$$

என்று எழுதலாம் (9.23)-ன் முதலிரண்டு சமன்பாடுகளுக்கான அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு குறையல்லா $m+n$ மாறிகளைப் பெற்றிருக்கும். முழுச் செயற்கை செய்தக்க அடிப்படை ஒன்றை

$$w_i = b_i,\ (i=1, 2, \ldots, m)$$
$$z_{1j} = -p_j,\ (p_j \leqslant 0 \text{ என்ருல்})$$
$$z_{2j} = p_j,\ (p_j > 0 \text{ என்ருல்})\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

என்ற மதிப்புகளால் கொடுக்கப்படுகின்றன. $U=O$, $\pi = O$ என்று எடுத்துக்கொண்டு (9·23)-ஐ ஒரு நேரியநெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்

கான கட்டுப்பாடுகளாகப் பாவித்து $\sum_{i=1}^{m} w_i$ என்னும் குறிக்கோள்

சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பையும் அம்மதிப்பிற்கான தீர்வையும் கணக்கிடுவோம் $AX=b$ என்ற பிரச்சினைக்குச் செய்தக்க தீர்வு இருந்தால் அது இம்முறையில் பெறப்படுகிறது. Z_1, Z_2 என்ற வெக்டர்கள்(9.23) -ன் இரண்டாவது கட்டுப்பாட்டை நிறைவு செய்ய வேண்டும். $W=O$ என்ற நிலையிலேயே $AX = b$-க்குச் செய்தக்க தீர்வு இருந்தால் அதை (9.23)-ன் இரண்டாவது கட்டுப்பாட்டிலும் உட்புகுத்தி, வலது புறங்களிலும் தகுந்த மாற்றங்கள் செய்து (9.23)-க்குச் செய்தக்க தீர்வு காணலாம்.

(9·23)-ன் இரண்டாவது கட்டுப்பாட்டில் Z_1, Z_2-க்களின் குறையல்லா கூறுகளுடன் தொடர்பு கொண்ட $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$என்ற வெக்டரை வரையறுக்கிறேம். இங்கு $z_j = z_{1j}$ அல்லது z_{2j}, $z_j > 0$ ஆகும். எனவே, இப்பொழுது (X, Z) என்ற அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குக் கிடைக்கிறது.

$$AX \qquad\qquad = b \qquad (9.24)$$

$$2CX - IU + A'\pi + IZ = -p' \qquad (9.25)$$

சமன்பாடு (9 25)-ல் $\bar{I} = (\delta_j)$ என்பது ஒரு n-பரிமாண மூலைவிட்ட அணியாகும் (diagonal matrix). இங்கு

$$\delta_j = \begin{cases} 1, p_j < 0 \text{ என்றால்} \\ -1, p_j > 0 \text{ என்றால்} \\ 0, p_j = 0 \text{ என்றால்} \end{cases}$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

அடுத்து, செயற்கை மாறிகள் z_j-களை நீக்கி (9·24), (9·25) கொடுக்கும் பிரச்சினைக்கு $X > O$; $U > O$; $X' U = 0$ என்ற கட்டுப்பாடுகளையும், π குறிக் கட்டுப்பாடற்றது என்ற கட்டுப் பாட்டையும் நிறைவு செய்கின்ற தீர்வு காண்கிறோம்.

$\sum_{j=1}^{n} z_j$ என்பதை மீச்சிறுமப்படுத்த வேண்டிய குறிக்கோள்சார்பாக எடுத்துக் கொண்டு (9·24), (9·25) கொடுக்கும் பிரச்சினைக்கு நேரியவல்லாத கட்டுப்பாடு $X' U = 0$-ம் நிறைவு செய்யப்படுவதற் கான தகுந்த மாற்றங்களுடன் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பயன் படுத்தித் தீர்வு காண்கிறோம். x_j ஏதாவது j-க்கு அடிப்படை மாறி என்றால் u_j அடிப்படை மாறியாக்கப்படக்கூடாது என்றும், u_j அடிப்படை மாறியாகவிருந்தால் x_j அடிப்படை மாறியாக்கப் படக்கூடாது என்றும் வரையறுத்துக் கொள்கிறோம். இந்தக் கட்டுப்பாட்டை மனதிற் கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைச் செயல்படுத்தும் போது $X' C X$ மிகை யுறுதியாக இருந் தாலும் அல்லது $p = O$ என்று இருந்தாலும் ஒரு சில நிலை களுக்கு பிறகு $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$ என்னுமாறு இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வைக் காணலாம் என உல்ஃப் நிரூபித்துள்ளார். $z_j > 0$ என்பதால் $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$ என்னும்போது அனைத்து j-க்கும் $z_j = 0$ என்றாகிறது. எனவே செயற்கை மாறிகள் இல்லாத அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு கிடைக்கிறது. கூஹ்ன்–டக்கர் கட்டுப்பாடுகளை X, U, π நிறைவு செய்வதால் இதுவே இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான தீர்வும் ஆகும்.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைக் கட்டுப்பாடுகள் (9·24), (9·25)–க்குப் பயன்படுத்த வேண்டுமாயின் குறிக் கட்டுப்பாடற்ற π குறையல்லா அணிகள் மூலமாக $\pi = \pi_1 - \pi_2$; $\pi_1 > O$; $\pi_2 > O$ என்று எழுதப்படவேண்டும். ஆகையால் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை பின்வரும் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாறுகிறது :

$$\left.\begin{aligned} &A\,X = b \\ &2\,C\,X - I\,U + A'\,\pi_1 - A'\,\pi_2 + \bar{I}\,Z = -p' \end{aligned}\right\} \quad (9{\cdot}26)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$\sum_{j=1}^{n} z_j\text{–ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்பை காண்க. இங்கு X, U, π_1, π_2, Z என்பன குறையல்லாதவை என்பதோடு $X'\,Z = 0$ என்பதும் உண்மையாகும்.

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட திருத்தத்துடன் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையை இப்பிரச்சினைக்குப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : உல்ஃப் முறையைப் பயன்படுத்தி,

$$8\,x_1 + 10\,x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

என்ற சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பை

$$3\,x_1 + 2\,x_2 < 6$$
$$x_1,\ x_2 > 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக் காண்க.

தீர்வு : இங்கு

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\ ;\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\ ;\quad b = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$$

ஆகும். மேலும்,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= X'\,C\,X$$

மிகையுறுதியான இருபடி அமைப்பு ஆகும்.

இனி, $p = (-\ 8\ -\ 10)$ என்று எடுத்துக்கொண்டால் கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$A\,X < b,\quad X > O$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$f(X) = pX + X'CX\text{-ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்பு காண்க. $X'CX$ இருபடி மிகையுறுதி அமைப்பு என்பதால் உல்ஃப்-சுருங்கிய முறையில் இதைத் தீர்க்கலாம். $\pi = (\pi) \geq 0$ என்ற லாக்ராஞ்சிப் பெருக்கியை எடுத்துக்கொண்டு லாக்ராஞ்சிச் சார்பை

$$F(X, \pi) = pX + X'CX + \pi(AX - b)$$

என எழுதலாம். சாதாரண (வெக்டர்கள் இல்லாத) குறியீட்டில் லாக்ராஞ்சிச் சார்பு

$$F(x_1, x_2, \pi) = -8x_1 - 10x_2 + x_1^2 + x_2^2 + \pi(3x_1 + 2x_2 - 6)$$

ஆகும். ஆகவே,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -8 + 2x_1 + 3\pi$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -10 + 2x_2 + 2\pi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \pi} = 3x_1 + 2x_2 - 6$$

என்பதால் கூஹ்ன் -டக்கர் கட்டுப்பாடுகள்

$$\left.\begin{array}{l} -8 + 2x_1 \qquad + 3\pi \geq 0 \\ -10 \qquad + 2x_2 + 2\pi \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} -8 + 2x_1 & & +3\pi \\ -10 & +2x_2 & +2\pi \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rl} 3x_1 + 2x_2 - 6 & \leq 0 \\ \pi(3x_1 + 2x_2 - 6) & = 0 \\ \pi & \geq 0 \end{array}$$

என்று எழுதப்படலாம்.

$u_1, u_2, z_3 \geq 0$ என்பவை தொய்வு மாறிகள் என்றால் $z_1, z_2 \geq 0$ என்ற செயற்கை மாறிகளை உட்புகுத்திக் கொடுத்துள்ள பிரச்சினையை பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$z_1 + z_2$$

என்னும் குறிக்கோள் சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பைப் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்கக்காண்க ;

$$
\begin{aligned}
-8 + 2x_1 \quad &+ 3\pi - u_1 \quad + z_1 &= 0 \\
-10 + 2x_2 \quad &- u_2 \quad + z_2 &= 0 \\
x_1 u_1 + x_2 u_2 & &= 0 \\
-6 + 3x_1 + 2x_2 & \quad + z_3 &= 0 \\
\pi \quad (3x_1 + 2x_2 - 6) & &= 0
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, u_1, u_2, z_3, z_1, z_2 \geqslant 0.$$

குறிக்கோள் சார்பு $z_1 + z_2$-ன் மதிப்பு 0 என்னும்போது கிடைக்கும் தீர்வு இருபடி பிரச்சினைக்கான தீர்வாகும்.

கணக்கீடுகள் அட்டவணை (9.1)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. z_3, z_1, z_2 என்பவைகளை முதனிலை அடிப்படையாகக் கொண்டு கணக்கீடுகளைத் தொடங்குகிறோம். செயற்கை மாறிகள் இரண்டும் நான்காவது நிலையில் முழுமையும் நீக்கப்பட்டுவிடுகின்றன. இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $\pi = 4$; $u_1 = 4$; $u_2 = 0$; $z_3 = 0$ ஆகும். மேலும் கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்பு 21 ஆகும்.

படம் (9.1)-ல் வடிவ கணிதமுறை விளக்கம் தரப்பட்டுள்ளது $\triangle OAB$-ன் மேலும் உள்ளேயும் அமைந்த புள்ளிகள் $x_1 \geqslant 0$. $x_2 \geqslant 0$; $3x_1 + 2x_2 \leqslant 6$ என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்றன.

(iii) $$f(x_1 x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 - 41$$

என்பதால் $f(x_1, x_2) = k$ என்பது x_1, x_2 தளத்தில் (4,5)-ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தைக் குறிக்கிறது. $k = -21$ என்னும் போது, f-ன் மீச்சிறு மதிப்பாகிய -21 கிடைக்கிறது.

உல்ஃப்முறை - விரிவான அமைப்பு:

$p \neq O$, $X'CX$ மிகை அரையறுதியானது என்று எடுத்துக் கொண்டு இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண்கிறோம். இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வைப் பெற $\lambda \geqslant 0$ என்ற துணையலகுடன்

$$f(X) = \lambda p X + X'CX$$

என்ற குறிக்கோள் சார்பை

$$AX = b; \; X \geqslant O$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $\lambda = 1$ என்னும் போது கிடைக்கும் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வே நாம் பெற விரும்புவது. பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

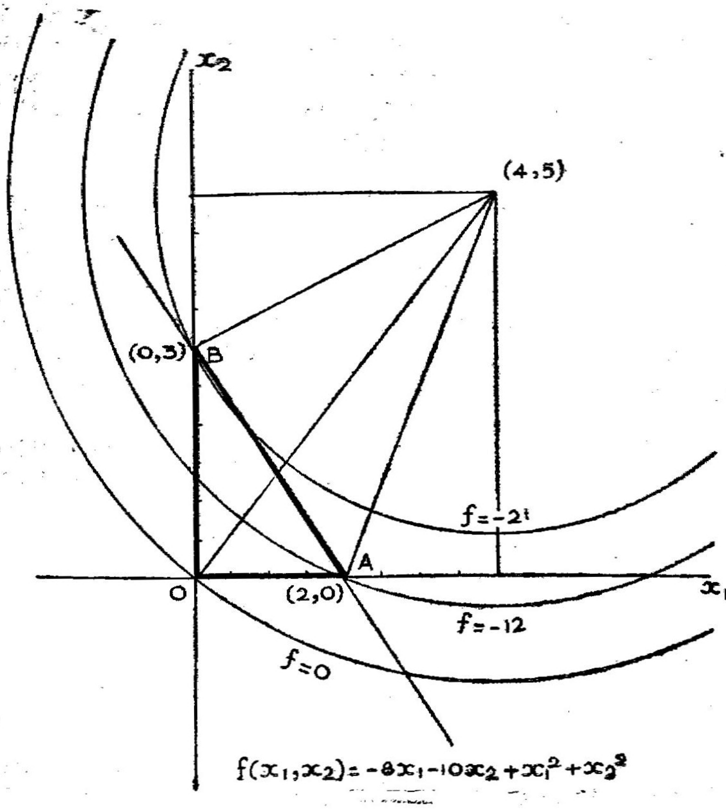
அட்டவணை (9·1)

i	C	அடிப்படை	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	
				x_1	x_2	π	u_1	u_2	z_3	z_1	z_2	
				0	0	0	0	0	0	w	w	
1	0	P_6	6	3	2	0	0	0	1	0	0	முதனிலை
2	w	P_7	8	2	0	(3)	−1	0	0	1	0	→
3	w	P_8	10	0	2	1	0	−1	0	0	1	
4			0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5			18	2	2	4 ↑	−1	−1	0	0	0	
1	0	P_6	6	3	(2)	0	0	0	1	✕	0	நிலை(ii) →
2	0	P_3	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	✕	0	
3	w	P_8	$\frac{22}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2	0	$\frac{1}{3}$	−1	0	✕	1	
4			0	0	0	0	0	0	0	✕	0	
5			$\frac{22}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2 ↑	0	$\frac{1}{3}$	−1	0	✕	0	
1	0	P_2	3	$\frac{3}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	✕	0	நிலை(iii)
2	0	P_3	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	✕	0	
3	w	P_8	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$	0	0	($\frac{1}{3}$)	−1	−1	✕	1	→
4			0	0	0	0	0	0	0	✕	0	
5			$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$ ↑	−1	−1	✕	0	
1	0	P_2	3	$\frac{3}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$			நிலை(iv) இறுதிநிலை
2	0	P_3	4	−3	0	1	0	−1	−1			
3	0	P_4	4	−11	0	0	1	−3	−3			
4			0	0	0	0	0	0	0			
5			0	0	0	0	0	0	0			

இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வு :

$x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $\pi = 4$; $u_1 = 4$; $u_2 = 0$; $z_1 = 0$

மீப்பெருமதிப்பு = **21.**



படம் (9.1)

$$
\begin{aligned}
&A X && = b \\
&2CX - IU + A'\pi - A'\pi_2 + \overline{I}Z = -\lambda p' \\
&X'U = O \\
&Z > O;\ X > O;\ U > O;\ \pi_1 > O;\ \pi_2 > O;\ \lambda > 0
\end{aligned}
$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$\sum_{j=1}^{n} z_j\text{-ன்}$$

மீச்சிறு மதிப்புக் காண்க.

இப்பிரச்சினையின் தீர்வு காண முதலில் $\lambda = 0$ என்று கொண்டு சுருங்கிய அமைப்பிற்கான உல்ஃப்பின் கணக்கீடுகளைப் பயன்

படுத்துகிறோம். பின்னர் எல்லா z_j-க்களும் 0 என்று வைத்துக் கொண்டு துணையலகு நெறிப்படுத்துதலுக்கான சிம்ப்ளக்ஸ் கணக்கீடுகளைப் பயன்படுத்தி $\lambda > 0$–க்கு தீர்வுகள் காண்கிறோம். இப்போது குறிக்கோள் சார்பு $-\lambda$ என்று எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டு அதன் மீச்சிறு மதிப்புக் காணப்படுகிறது.

இந்த நிலையில் உல்ஃப் பின்வருவனவற்றை நிரூபித்து உள்ளார்: (i) சுருங்கிய அமைப்பிற்கான தீர்வையும், மீச்சிறுமப்படுத்த வேண்டிய குறிக்கோள் சார்பு $-\lambda$ என்றும் வைத்துக் கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைத் தொடங்கும்போது அடிப்படை மாற்றம் ஏதும் செய்ய இயலவில்லை என்றால் இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான குறிக்கோள் $f(X)$, $\lambda > 0$ என்னும் போது, வரம்பற்றது.

(ii) $0 = \lambda_0, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ என்னும் துணையலகின் மதிப்புகளுக்குச் சரியாக முறையே $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_s$ என்ற தீர்வுகளைப் பின்வருமாறு காணலாம் :

$\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$ என்னும்போது, $(k = 1, 2, \ldots, s-1)$

$$X = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} X_k + \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} X_{k+1}, \text{-ம்}$$

$\lambda > \lambda_s$ என்னும் போது,

$$X = X_s + (\lambda - \lambda_s) X_\infty \text{ -ம்}$$

இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வாகும். (இங்கு சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் இறுதிநிலைத் தீர்வு X_∞ என்று கொள்ளப் படுகிறது.)

9·5. இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் தீர்வு காணல்-பீல்முறை :

நமது பிரச்சினை

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ ; \ x_j > 0 \ ;$$

$$i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$C = \sum_j \sum_k \gamma_{jk} x_j x_k \qquad (9{\cdot}27)$$

$(j, k = 1, 2, \ldots, n; \ \ x_0 = 1)$ என்பதன்

மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்பது என்போம். § 3. 3-ல் செய்தது போன்று ஏதாவது m அடிப்படை மாறிகளுக்கு மற்ற $n-m$ மாறிகளை அடிப்படையல்லா மாறிகளாகப் பாவித்து பின்வரும் சமன்பாடுகளாகக் கட்டுப்பாடுகளை அமைக்கலாம் :

$$X_i = x_{i0} + \sum_{j=1}^{n-m} x_{ij}\,(-X_{m+j})$$

இங்கு, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்பன x_j-களின் ஏதோவொரு வரிசை மாற்றம் (permutation) ஆகும். பிரச்சினையின் உண்மை மாறிகள் அல்லாத வேறு சில அடிப்படையல்லா மாறிகளையும் பின்னர் உட்புகுத்த வேண்டியிருப்பதால் $X_{m+j} = z_j$ என்று எழுதி கட்டுப்பாடுகளை,

$$X_i = x_{i0} + \sum_{j} x_{ij}\,(-z_j) \tag{9·28}$$

என்று எழுதுவோம்.

செய்தக்க தீர்வுகள் காணும்போது குறிக்கோள் சார்பு பயன்படுத்தப்படவில்லை என்பதால் நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கும், இருபடி நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கும் செய்தக்க முதனிலைத் தீர்வு காணும்முறை ஒன்றே. எனவே பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாமல் $x_{i0} > 0$ என்று நாம் எடுத்துக் கொள்ளலாம். (9·28)-இலிருந்து அடிப்படை மாறிகளுக்கு ஈடுசெய்து மீச்சிறுமப்படுத்த வேண்டிய சார்பு C-ஐ z_j-க்களின் மூலமாக எழுதலாம்.

மற்ற அடிப்படையல்லா மாறிகளைப் பூச்சியத்திற்கு ஈடுசெய்து, C-ன் பகுதி வகைக்கெழுவை z_q என்ற அடிப்படையல்லா மாறியைப் பொறுத்துக் காண்போம். $\dfrac{\partial C}{\partial z_q} > 0$ என்றால், z_q-ஐ சற்றே அதிகரிக்கும்போது மற்ற அடிப்படையல்லா மாறிகள் 0 என்ற நிலையில், C-ன் மதிப்புக் குறைவுறாது. ஆனால் $\dfrac{\partial C}{\partial z_q} < 0$ என்றால் z_q அதிகரிக்கும்போது C-ன் மதிப்புக் குறைவுறும். தொடர்ச்சியுள்ள வகைக் கெழுக்களைப் பெற்ற நேரிய அல்லது நேரியவல்லாத சார்பாக C இருந்தால்,

(அ) ஏதாவது அடிப்படை மாறி X_p குறையெண்ணாக மாறும் வரையில், அல்லது

(ஆ) $\dfrac{\partial C}{\partial z_q}$ பூச்சியமாகி மிகையாக மாறும் நிலையை

எய்தும் வரையில், z_q-ன் மதிப்புகளை உயர்த்தலாம்.

குறிக்கோள் சார்பு நேரியச் சார்பு என்னும்போது நிலை (அ) தான் நிகழ வாய்ப்பு இருக்கிறது. z_q-ஐ அடிப்படை மாறியாகவும் X_p-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாகவும் மாற்றி,

$$X_p = x_{p0} + \sum_j x_{pj}\,(-z_j) \tag{9·29}$$

என்பதைப் பயன்படுத்தி கட்டுப்பாடுகளையும், குறிக்கோள் சார்பையும் X_p, z_q அல்லது மற்ற அடிப்படையல்லா மாறிகள் ஆகியவற்றின் மூலம் தெரிவிக்கலாம்.

ஆனால் நிலை (ஆ)-ல் C நேரியவல்லாதது என்னும்போது தொல்லைகள் ஏற்படுகின்றன. இருப்பினும் C இருபடிச் சார்பு என்றால் $\frac{\partial C}{\partial z_q}$ நேரியச் சார்பாகும். இப்பொழுது கணக்கீடுகளை ஒரு திட்ட அமைப்பிற்குக் கொண்டுவர இயலுகிறது.

(9·27)-ல் கொடுக்கப்பட்ட C-ஐ z_j-க்கள் மூலமாக ஒரு சமச்சீர் அணியின் அமைப்பில்

$$C = \sum \sum c_{jk}\, z_j\, z_k \tag{9·30}$$

$(j, k = 0, 1, 2, \ldots, z_0 = 1)$ என்று எழுதுகிறோம். இப்பொழுது,

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial C}{\partial z_q} = c_{q0} + \sum_k c_{qk}\, z_k \tag{9,31}$$

ஆகும். $z_k = 0, k \neq q$, என்னும்போது, இது $c_{q0} + c_{qq}\, z_q$ என்று ஆகிறது. z_q-ஐ $- c_{q0}/c_{qq}$ வரை உயர்த்தும்போது ($c_{q0} < 0$) என்பதைக் கவனிக்கவும்.) அடிப்படை மாறிகளுள் ஒன்று குறையாக மாறுவதற்கு முன்னர் $\frac{\partial C}{\partial z_q}$ மிகையாக மாறுகிறது என்றால்,

$$u_t = c_{q0} + \sum_k c_{q0}\, z_k \tag{9·32}$$

என்று எழுதி u_t-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாக்குகிறோம். (இங்கு u_t என்பது இம்மாதிரி உட்புகுத்தப்படும். t-வது மாறி என்பதை t என்ற அடிக்குறி புலப்படுத்துகிறது). (9.32)-ஐப் பயன்படுத்தி **(9.29)**, **(9.30)**-களில் உள்ள z_q-ற்கு u_t, z_j $(j \neq k)$ மூலம் ஈடுசெய்து புதிய கட்டுப்பாடுகளை அமைக்கிறோம். இப்போது $m+1$ அடிப்படை மாறிகள் இருக்கின்றன. என்பதையும் கவனிக்கவும்.

இந்த முறையைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தி ஒரு சில நிலைகளுக்குப் பிறகு இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வை அடையலாம்.

u_t மிகை மதிப்புகளைத்தான் ஏற்கவேண்டும் என்ற கட்டுப்பாடு இல்லை. எனவே அதை சுயேச்சை மாறி (free vaiiable) என்று கூறுகிறோம். $\frac{\partial C}{\partial u_t} > 0$ என்றுஏதாவது நிலையில் இருந்தால் u_t-ஐக் குறையாக்கி (அல்லது $u_t = -v_t$ என்று எழுதி v_tஐ அதிகரித்து) C-ன் மதிப்பைக் குறிக்கலாம். வேறொரு x-மாறி அடிப்படையல்லா மாறியாகும்வரை $\frac{\partial C}{\partial u_t} = 0$ என்று இருக்கும். இந்தநிலை வந்தவுடன் முறையாக ஒவ்வோரு சுயேச்சை அடிப்படையல்லா மாறியையும் வரிசையாக C-ன் மதிப்பு உயராத வகையில் அதிகரித்தோ அல்லது குறைத்தோ அடிப்படை மாறியாக்குகிறோம். அடிப்படையல்லா மாறியாகவுள்ள u_t-ஐ நீக்கியபிறகு அதைப் பற்றிக் கவலைப்படத் தேவையில்லை. (செயற்கை மாறிகளுடன் ஒப்பிடவும்.)

இனி கணக்கீடுகளைப் பற்றிக் கவனிப்போம். அடிப்படையில் உட்புகுத்தப்படும் மாறி z_q என்றும் அடிப்படையல்லா மாறியாக மாறுவது z_p அல்லது u_t என்றும் கொள்வோம். z_p அல்லது u_t-ஐப் பொதுவாக ξ என்று குறிப்பிடுவோம். அடிப்படை மாற்றமடைந்த மைய நிரையை (pivotal row),

$$z_q = e_0 + e_q \xi + \sum_{k \neq p} e_k z_k \tag{9.33}$$

என்று எடுத்துக்கொண்டு, (9.30)-ல் z_q-ற்கு (9.33)-ஐ ஈடுசெய்து C-ஐ

$$C = \sum \sum c_{jk}' z_j z_k \tag{9.34}$$

என்று எழுதுவோம். (9.34)-ல் c_{qq}' என்பது ξ^2-ன் கெழுவையும் $c_{qj}' = c_{jq}'$ என்பது $2\xi z_j$-ன் கெழுவையும் குறிக்கின்றன. பின்வரும் வாய்பாடுகள் கிடைக்கின்றன :

$$\left.\begin{aligned} c_{qq}' &= c_{qq} e_q^2 \\ c_{jq}' &= c_{qj}' = c_{jq} e_q + c_{qq} e_q e_j \\ c_{jk}' &= c_{jk} + c_{jq} e_q + c_{qk} e_j + c_{qq} e_j e_k \end{aligned}\right\} \tag{9.35}$$

இங்கு $j, k \neq q$ என்று கொள்ளப்பட்டது.

$$\left.\begin{aligned} c_q^* &= \tfrac{1}{2} c_{qq} e_q \\ c_j^* &= c_{jq} + \tfrac{1}{2} c_{qq} e_j \qquad (j \neq q) \end{aligned}\right\} \tag{9.36}$$

என்று கொண்டால் (9·35)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$\left.\begin{aligned} c_{qq}' &= 2 c_q^* e_q \\ c_{jq}' &= c_{qj}' = c_j^* e_q + c_q^* e_j \\ c_{jk}' &= c_{jk} + c_j^* e_k + c_k^* e_j \end{aligned}\right\} \tag{9.37}$$

எடுத்துக்காட்டு: [பீல் (Beale)] $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 2$ என்ற கட்டுப்பாட்டுகளுக்கு இணங்க,

$$C = 6 - 6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

என்ற இருபடிச்சார்பின் மீச்சிறுமத்தீர்வு காண்க.

தீர்வு: தொய்வுமாறி x_3-ஐ உட்புகுத்திக் கொடுத்துள்ள கட்டுப்பாட்டை

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

என எழுதலாம். x_1, x_1-களை அடிப்படையல்லா மாறிகளாக்கினால்

$$x_3 = 2 + 1\,(-x_1) + 1\,(-x_2)$$

$$\begin{aligned} C &= 6 - 3\,x_1 \\ &\quad + (-3 + 2x_1 - x_2)\,x_1 \\ &\quad + (\quad - x_1 + 2x_2)\,x_2 \end{aligned} \qquad (9.38)$$

என்று கட்டுப்பாட்டையும், குறிக்கோள் சார்பையும் எழுதலாம். C-ல் கெழுக்கள் சமச்சீர் அணியை அமைக்குமாறு எழுதப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும்:

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial C}{\partial x_1} = -3 + 2x_1 - x_2$$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial C}{\partial x_2} = -x_1 + 2x_2$$

என்பதால் $\tfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial C}{\partial x_1} = -3$, ($x_1 = x_2 = 0$ என்னும்போது) என்று அறிகிறோம். எனவே x_1-ன் மதிப்புகளை 0-விலிருந்து உயர்த்துகிறோம். ஆனால் $x_1 = 2$ என்னும்போது $\tfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial C}{\partial x_1} = -3 + 2 \times 2 = 1$

($x_2 = 0$ என்று கொள்கிறோம்). எனவே, $\dfrac{\partial C}{\partial x_1}$ அடிப்படை மாறி x_3 குறையாவதற்கு முன்னரே மிகையாகி விடுகிறது. ஆகையால் அடிப்படையிலிருந்து எந்த உண்மை மாறியையும் அதாவது x_3-ஐ நீக்க முடியாது. சுயேச்சைமாறி u_1-ஐ,

$$u_1 = -3 + 2x_1 - x_2$$

என்று வரையறுத்து, u_1-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாக்குவோம். ஆகவே,

$$x_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\,u_1 + \tfrac{1}{2}\,x_2$$

(9.33) உடன் ஒப்பிட்டால்,

$$q = 1 ; \quad e_0 = \tfrac{3}{2} ; \quad e_1 = \tfrac{1}{2}, \quad e_2 = \tfrac{1}{2}$$

என்றும் (9.38)-இலிருந்து,

$$c_{00} = 6 ; \quad c_{11} = 2 ; \quad c_{22} = 2$$
$$c_{01} = c_{10} = -3 ; \quad c_{02} = c_{20} = 0$$
$$c_{12} = c_{21} = -1 ;$$

என்றும் கிடைக்கின்றன. (9.36)-இலிருந்து

$$\tfrac{1}{2} c_{11} = 1 ; \quad c_0{}^* = -\tfrac{3}{2} ; \quad c_1{}^* = \tfrac{1}{2} ; \quad c_2{}^* = -\tfrac{1}{2}$$

என்று கிடைப்பதால் (9.37)-ஐப் பயன்படுத்தி

$$x_1 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}(-u_1) - \tfrac{1}{2}(-x_2)$$
$$x_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(-u_1) + \tfrac{3}{2}(-x_2)$$
$$C = (\tfrac{3}{2} \qquad - \tfrac{3}{2} x_2)$$
$$+ (\qquad \tfrac{1}{2} u_1 \qquad) u_1$$
$$+ (-\tfrac{3}{2} \qquad + \tfrac{3}{2} x_2) x_2$$

என்று எழுதலாம். இப்பொழுது

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_2} = -\tfrac{3}{2} ; \quad \tfrac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial u_1} = 0, \ (x_2 = u_1 = 0)$$

என்பதால் x_2-ன் மதிப்பை உயர்த்துகிறோம். $x_2 = \tfrac{1}{3}$ வரை இது முடியும். அப்பொழுது $x_3 = 0$ என்று ஆகும். $\tfrac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_2} = -\tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{2} \times \tfrac{1}{3} = -1, (u_1 = 0)$. ஆகவே, x_3-ஐ அடிப்படையல்லா மாறியாக்குகிறோம். மாற்றப்பட்ட மைய நிரை

$$x_2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} u_1 - \tfrac{2}{3} x_3$$
$$\therefore q = 2; \quad e_0 = \tfrac{1}{3} ; \quad e_1 = -\tfrac{1}{3} ; \quad e_2 = -\tfrac{2}{3}$$
$$\tfrac{1}{2} c_{qq} = \tfrac{3}{4} ; \quad c_0{}^* = -\tfrac{5}{4} ; \quad c_1 = -\tfrac{1}{4} ; \quad c_2{}^* = -\tfrac{1}{2}.$$

புதிய அட்டவணையை,

$$x_1 = \tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{3}(-u_1) + \tfrac{1}{3}(-x_3)$$
$$x_2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}(-u_1) + \tfrac{2}{3}(-x_3)$$
$$C = (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} u_1 + \tfrac{2}{3} x_3)$$
$$+ (\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} u_1 + \tfrac{1}{3} x_3) u_1$$
$$+ (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} u_1 + \tfrac{2}{3} x_3) x_3$$

என்று அமைக்கலாம்.

x மாறியொன்றை அடிப்படையல்லா மாறியாக எழுதியிருப்பதால், u_1-ஐ அடிப்படை மாறியாக்க வேண்டும். $\frac{\partial C}{\partial u_1} > 0$ என்ப

தால், u_1-ன் மதிப்பைக் குறைக்க வேண்டும். $u_1 = -5$ என்ற நிலை வரையில் இது இயலும்; அப்பொழுது $\frac{1}{2}\frac{\partial C}{\partial u_1} = \frac{1}{3} - \frac{10}{3} = -3$. எனவே நமது அடுத்த அடிப்படையல்லா மாறி சுயேச்சைமாறி

$$u_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}x_3$$

ஆகும். ஆகவே,

$$u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}x_3$$

ஆகையால்

$$q = 1;\quad e_0 = -\frac{1}{2};\ e_1 = \frac{3}{2};\ e_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}c_{qq} = \frac{1}{3};\ c_0^* = \frac{1}{6};\ c_1^* = \frac{1}{2};\ c_2^* = \frac{1}{6}$$

என்று ஆகின்றன. புதிய அட்டவணையை

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-u_2) + \frac{1}{2}(-x_3)$$

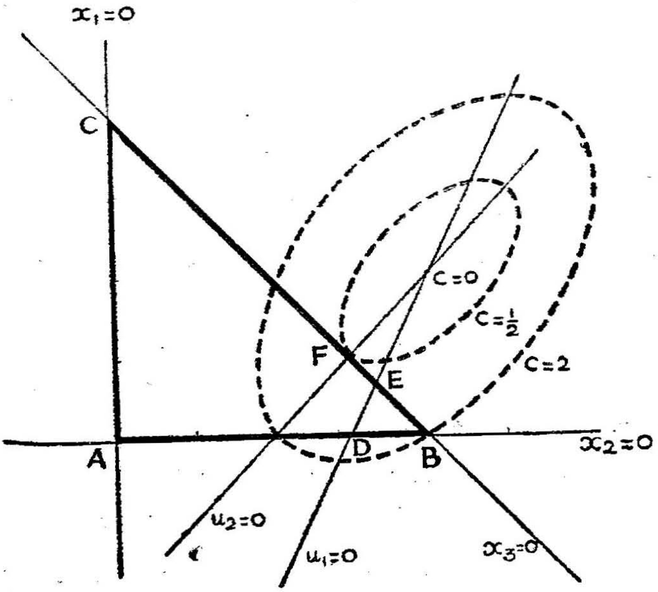
$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-u_2) + \frac{1}{2}(-x_3)$$

$$C = (\tfrac{1}{2} \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}x_3)$$
$$+ (\qquad \frac{3}{2}u_2 \qquad\qquad)u_2$$
$$+ (\tfrac{1}{2} \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}x_3)x_3$$

என்று அமைக்கலாம். இதுவே இறுதி அட்டவணையாகும். தீர்வு $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $C = \frac{1}{2}$ என்று கிடைக்கிறது.

படம் (9·2)-ல் இது விளக்கப்பட்டுள்ளது. கட்டுப்பாடுகளுக்கான செய்தக்கப்பிரதேசம் முக்கோணம் ABC ஆகும். C மாறிலி என்னும்போது கிடைக்கும் வளைவரைகள் ஒரு மைய நீள் வட்டங்கள் (ellipses) ஆகும். இவற்றின் மையம் (2, 1) என்ற புள்ளியாகும். முதனிலைச் சோதனைத்தீர்வு A என்ற புள்ளியிடத்துக் கிடைத்தது x_1, x_2 அடிப்படையல்லா மாறிகளாக இருந்தன. x_1-ஐ அதிகரித்து B-ஐ நோக்கித் தீர்வை மாற்றினோம். B-வரைச் செல்வது பயனுடையது அல்ல என்று அறிந்து $u_1 = 0$ என்ற கோடு $x_2 = 0$-ஐ வெட்டும் புள்ளி D வரை சென்றோம். இப்பொழுது x_2-ன் மதிப்புகளை $u_1 = 0$ வழியாக அதிகரித்து $x_3 > 0$

என்று கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால் E-வரை சென்று பிறகு தொடராமல் நின்றுவிட்டோம். இந்த நிலையில் சுயேச்சை மாறி u_1 நீக்கப்படுகிறது. $u_1 = 0$ என்பது $C =$ மாறிலி என்ற வளை வரைகள்



படம் (9.2)

$x_2 = 0$-க்கு இணையாக தொடு கோடுகளைப் பெற்ற புள்ளிகளின் நியமப்பாதை என்று அறிக. u_1-ஐக் குறைத்து C-ன் மதிப்பை $x_3 = 0$ என்னும் கட்டுப்பாட்டிற்கிணங்கக் குறைக்கின்ரேம். F-ஐ அடையும் வரை u_1-ன் மதிப்புகளைக் குறைக்கலாம். இப்பொழுது $u_2 = 0$ என்னும் சுயேச்சை மாறி உட்புகுத்தப்படுகிறது. C மீச்சிறுமமாகின்றதும் x_3 குறிப்பிட்ட மதிப்பை ஏற்கின்றதுமான அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் u_2 பூச்சியமாகவே இருக்கிறது இதுவே இறுதித் தீர்வு ஆகும்.

பயிற்சிகள்—பாடம் 9

(9.1) §(9.5-ல் பீலின் முறையை விளக்கக்கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டிற்கு உல்ஃபின் முறையில் தீர்வு காண்க.

(9.2) § (9.4)-ல் உல்ஃபின் முறையை விளக்கக்கொடுக்கப் பட்ட எடுத்துக்காட்டிற்கு பீலின் முறையில் தீர்வு காண்க.

(9.3)
$$\left.\begin{array}{llll} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & & & = 6 \\ 2x_1 + x_2 & + x_4 & & = 4 \\ x_1 & & & \geq 0 \\ x_2 & & & \geq 0 \\ x_3 & & & \geq 0 \\ x_4 & & & \geq 0 \end{array}\right\}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$-2x_1 - x_2 + x_1^2$$

என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பைத்தரும் தீர்வு காண்க. (ஹாட்லி)

(9.4)
$$\begin{array}{ll} x_2 + x_3 & = 8 \\ x_1 + x_2 + x_4 & = 10 \\ x_j & \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4) \end{array}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$-10x_1 - 20x_2 - x_1 x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$$

என்ற சார்பின் மீச்சிறு மதிப்பைத்தரும் தீர்வு காண்க.

(Carr and Howe, Quantitative Decision Procedures in Management and Economics, Mc Graw Hill Book. Coy., New york (1964))

(9.5) பயிற்சிகள் (9.3), (9.4) இரண்டிற்கும் வடிவ கணித முறையில் தீர்வு காண்க.

(9.6)
$$\left.\begin{array}{ll} x_1 + 4x_2 & \leq 4 \\ x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_1 & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{array}\right\}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_2^2$$

என்னும் சார்புக்கு மீச்சிறு மதிப்பைத் தரும் தீர்வைக் காண்க. வடிவ கணிதமுறையில் விளக்கம் தருக. (ஹாட்லி)

10. நேரியவல்லாத நெறிப்படுத்துதல் - சில சிறப்பு முறைகள்

(Non-linear Programming-Special Procedures)

10.1 முன்னுரை:

இந்தப் பாடத்தில் நேரியவல்லாத பிரச்சினைகளின் தீர்வுக்கான சில சிறப்பு முறைகள் விவரிக்கப்படுகின்றன. முறைகள் மிகவும் சுருக்கமாகவே தரப்படுகின்றன. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை களில் உள்ள எளிமை இவற்றிற்குக் கிடையாது என்பது வெளிப் படை. ஆனால் சாதராணமாகப் பிரச்சினைகளின் கணித மாதிரிகள் கட்டுப்பாடுகளையும், குறிக்கோள் சார்பையும் மாறிகளில் நேரியச் சார்புகளாகத்தருவதில்லை. எல்லா சந்தர்ப்பங்களிலும்தோராயமாக வேனும் நேரியத்தன்மையைப் பிரச்சினையில் உட்புகுத்தும் வாய்ப்பும் கிட்டுவதில்லை. எனவே, இம்முறைகளைப்பற்றிய அறிவு ஆய்வாளருக்கு இன்றியமையாததாகிறது. பின்வரும் பகுதிகளில் (i) பிரித்து நெறிப்படுத்துதல், (ii) முழுவெண் நெறிப்படுத்துதல் (iii) சுருக்கச்சிதைவு, (iv) புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல் ஆகிய முறைகள் சுருக்கமாக விவரிக்கப்படுகின்றன. மேலும், இவற்றைப்பற்றியும், இவற்றின் பயன்பாடுகள் பற்றியும் அறிய விரும்புபவர்கள் ஜி. ஹாட்லி (G.Hadley) என்பவரின் Nonlinear and Dynamic Programming (Addison-Wesley Pub. Co., Inc., 1964) என்ற நூலைப் படித்துப் பயன்பெறலாம் இங்கு தரப்பட்டுள்ள விவரங்கள் பெரும்பாலும் E.M.L. Beale அவர்களின் Mathematical Programming in Practice(Sir Isaac pitman & Sons Ltd., London) என்ற நூலைத் தழுவியதாகும்.

10.2 பிரித்து நெறிப்படுத்துதல்: (Separable Programming)

நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான கட்டுப்பாடுகளிலோ, குறிக் கோள் சார்பிலோ ஏதாவது சில மாறிகள் முதற்படியில் இல்லாத போது பிரச்சினை நேரியத்தன்மையை இழந்துவிடுகிறது என்பதைக் கண்டோம். இந்நிலைகளில் பிரச்சினையின் நேரியவல்லாத கோவை களை எல்லாம் ஒரே மாறிச் சார்புகளின் கூடுதல் அல்லது வேறு பாடாகப் பிரித்து எழுதக்கூடும் என்று எடுத்துக் கொண்டு தீர்க்

காணும் முறையினைச் செயல்படுத்துவதால் அதைப் பிரித்து நெறிப் படுத்துதல் என்கிறோம்.

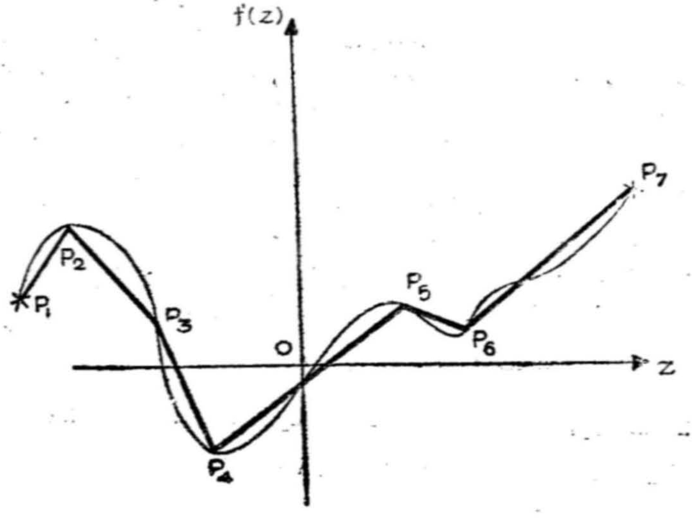
படம் (10.1)-ஐப் பார்க்கவும் $f(z)$ என்ற z-ஐச் சார்ந்த சார்பின் வளை வரை தரப்பட்டுள்ளது. படத்தில் காட்டியவாறு வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு சில புள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டு அவற்றை வரிசையாக ஈரிரண்டாகச் சேர்த்துக் கிடைக்கும் திறந்த பல கோணத்தை z-க்கான கொடுக்கப்பட்ட வீச்சில் $f(z)$-ன் தோராய அமைப்பு என்று கருதலாம். எடுத்துக்காட்டிற்காக 7 புள்ளிகள் $P_1, P_2, \ldots, P_7$ குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் ஆயத் தொலைகள் முறையே, (h_i, k_i), $i = 1, 2, \ldots, 7$ என்று கொள்வோம். இப்புள்ளிகளுடன் λ_i $i=1, 2, \ldots, 7$ என்னும் 7 குறையல்லா மாறிகளைத் தொடர்புபடுத்தி,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_7 = 1 \tag{10.1}$$

$$h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 + \ldots + h_7 \lambda_7 = z \tag{10.2}$$

$$k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + \ldots + k_7 \lambda_7 = f(z) \tag{10.3}$$

என்ற சமன்பாடுகளை அமைப்போம். λ_i என்னும் புது மாறிகளை தனிமாறிகள் (Special Variables) என்றும் (10.1) (10.2) சமன்பாடுகளை முறையே குவி நிரை (Convexity row) தொடர்பு



படம் (10.1)

நிரை (reference row) என்றும் கூறுகிறோம். $z, f(z)$ குறையல்லாத எண்கள் எனக் கொள்ளத் தேவையில்லை.

$f(z)$ குறிக்கும் வளைவரையின் தோராய உருப்பல கோணத்தின் முனைகள் தன்மாறிகளுள் ஒன்றைத்தவிர மற்றவைகளைப் பூச்சியத்திற்கு ஈடுசெய்யும்போது முறையே கிடைக்கின்றன. மேலும், வரையின் மற்றப்புள்ளிகள் அடுத்தடுத்த இரு தனி மாறிகளுக்கு பூச்சியமல்லாத மதிப்பைக் கொடுத்து மற்ற மாறிகளை பூச்சியத்திற்கு ஈடு செய்யும்போது கிடைக்கின்றன. தனி மாறிகளின் மற்ற வெல்லா மதிப்புகளுக்கும் வளைவரையைச் சாராத புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன.

$f(z)$ குவிச்சார்பு என்றால் அடுத்தடுத்தில்லாதத் தனிமாறிகள் அதன் மதிப்பைக் கூடுதலாகக்கணக்கிடுகின்றன. $f(z)$ மீச்சிறுமப் படுத்த வேண்டிய குறிக்கோள் சார்பின் ஒரு பகுதியானாலும் அல்லது $>$ என்னும் சமனின்மைக் கட்டுப்பாடொன்றின் வலப் புறத்தே இருந்தாலும் வேறு எந்த இடத்தும் அது தோன்றாத வரையில் இக்கூடுதல் கணக்கீடு பிரச்சினையைப் பாதிப்பதில்லை. இந்நிலைகளில் பிரித்து நெறிப்படுத்துதலுக்கான சிறப்பு வழி முறைகள் பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

மில்லர் என்பார் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் விதிகளைத் தகுந்தவாறு திருத்தியமைத்து குவிப்பிரச்சினையாக இல்லாத விடத்தும் கூட தனிமாறிகளின் பொருளற்ற மதிப்புகள் நிகழாவண்ணம் பார்த்துக் கொள்ள முடியும் என்பதைச் சுட்டிக் காட்டியுள்ளர். மில்லர் கூறும் தனிக்கேடுறு நிலை (special degeneracy) ஏற்படாத வரையில் ஓரிடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு (local optimum) இந்த முறையால் பெறப்படுகிறது. இது அனைத்திடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வாக (global optimum) இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை.

சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தும்போது அடிப்படையில் உட்புகுத்தப்படும் மாறியைப் பற்றிய பின்வரும் கட்டுப்பாடுகள் கவனத்திற் கொள்ளப்பட வேண்டியவையாகும். (அ) நடைமுறை அடிப்படையில் (current basis) இரண்டு தனிமாறிகள் இருந்தால் மூன்றாவது தனிமாறி அடிப்படையில் உட்புகுவதைத் தவிர்க்க வேண்டும். (ஆ) ஒரு தனிமாறி முன்னரே இருக்குமானால் அதை யடுத்தத் தனி மாறிகளுள் ஒன்று மட்டுமே அடிப்படையில் உட்புகும் வாய்ப்பைப் பெறுகிறது. இந்த நிபந்தனைகளுக்குட் பட்டுச் சிம்ப்ளக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தும் போது ஒரு சில நிலைகளுக்குப் பிறகு ஓரிடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வை அடைந்தே தீருகிறோம். எல்லா அடிப்படைத் தனி மாறிகளும் மிகை மதிப்புகளை ஏற்கும் போது ஓரிடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு

கிடைக்கிறது. தொடர்பு நிரைகளின் வலப்புறங்களில் சிறு மாறுதல்களைச் செய்து அடிப்படைத் தனிமாறிகள் மிகை மதிப்பை ஏற்குமாறு செய்துகொள்ளலாம்.

பல கணிதவியல் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகள் எல்லா விதங்களிலும் நேரியப் பிரச்சினையாக இருப்பினும் ஒரு சில உறுப்புகள் மாறிகளின் பெருக்கல்களாக வருவதால் நேரிய அமைப்பை இழந்து விடுகின்றன. எடுத்துடுகாட்டாக u_1, u_2 என்ற மாறிகளின் பெருக்கற் பலன் $u_1 u_2$ ஒரு நேரியவல்லாத சார்பு ஆகும் இதைச் சமாளிக்க

$$u_1 u_2 = \left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)^2 \qquad (10{\cdot}4)$$

என்று எழுதக் கூடுமாதலால் இரண்டு முதற்படி மாறிகளின் பெருக்கற் பலன் முதற்படி மாறிகளின் தேரியவல்லாத இரு சார்பு களின் வேறுபாடாக மாற்றப்படலாம் என்று அறிகிறோம். பொது வாகவே, இருபடிச் சார்பு எதையும் இரு வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாகவோ அல்லது வேறு பாடாகவோ எழுதக்கூடும்.

எனவே, இம்மாதிரிச் சார்புகள் எல்லாம் பிரித்து நெறிப் படுத்துதல் முறைக்கு ஏற்றவை என்று அறியலாம். நிலைக்கு ஒரு மாறியாக எத்தனை மாறிகளை வேண்டுமானுல் சேர்த்துக்கொண்டே செல்லக்கூடும் என்பதால் இந்த முறையினுல் எந்தச் சார்பையும் ஆராய்வது சாத்தியமாகிறது.

ஆகவே, ஒரு சாதாரண பெருக்கல் உறுப்பைச் சமாளிக்க இரு வெவ்வேறு தனி மாறிகளின் சேர்க்கைகளை உட்புகுத்துகிறோம். இதன் காரணமாகக் கூடுதலாக நான்குசமன்பாடுகள் கிடைக்கின் றன(ஒவ்வொரு சேர்க்கையிலும் உள்ள தனி மாறிகளின் கூடுதல் 1 என்பதைத் தெரிவிக்கும் கட்டுப்பாடுகளுக்கான குவி நிரைகள் இரண்டு; தனி மாறிகள் மூலமாக நேரிய வல்லாச் சார்புகளின் மதிப்புகளைத் தரும் தொடர்பு நிரைகள் இரண்டு.) இவை மேலே கூறப்பட்ட சமன்பாடுகள் (10·1), (10·2) போன்றவை. பொதுவாக z என்பதற்குப் பதிலாக அடிப்படை மாறிகளின் நேரியச் சேர்க்கை யொன்று இருக்கும். வெளிப்படையாக சமன்பாடு (10·3) நடை முறையில் எழுதப்படுவதில்லை. ஏனெனில் $f(z)$ தோன்றும் இட மெல்லாம் அதனிடத்து சமன்பாட்டின் இடது புறத்தை ஈடு செய்து விடுகிறோம்.

பிரித்து நெறிப்படுத்துதல் முறை அறுதியிட்ட இடைவெளிகளில் வரையறுக்கப்பட்ட நேரியவல்லாத சார்புகளுக்கே பொருந்தும் என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். சமன்பாடு (10·2)–இலிருந்து

z-ன் மதிப்புகள் h_1-ஐ விடக் குறைவாகவோ, h_7-ஐ விட அதிக மாகவோ, இருக்கமுடியாது. என அறியலாம். இந்த வரம்புகளை (h_1-ம் h_7-ம்) சிற்சில சமயங்களில் கம்ப்யூட்டர் புரோகிராமே தீர்மானித்து விடுவதும் உண்டு. பொதுவாக இவற்றிற்கு நடை முறையில் அவை ஏற்கவல்ல வரம்புகளை அளித்தல் நலமானது.

பெருக்கல் உறுப்புகளைப்பொறுத்த வரையில் சமன்பாடு (10·4) -ல் உள்ள u_1, u_2-க்களை $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant u_2 \leqslant 1$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு வீச்சு வரம்புகள் பெற்றிராத v_1, v_2 என்ற மாறிகளுக்கு,

$$v_1 = a_1 + b_1 u_1$$
$$v_2 = a_2 + b_2 u_2$$

என்றவாறு a_1, a_2, b_1, b_2-களைக் காணலாம். எனவே,

$$v_1 v_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 u_2 + a_2 b_1 u_1 + b_1 b_2 u_1 u_2$$
$$= - a_1 a_2 + a_2 v_1 + a_1 v_2 + f_1(z_1) + f_2(z_2)$$

என்று எழுதலாம். இங்கு

$$f_1(z_1) = b_1 b_2 z_1^2$$
$$f_2(z_2) = - b_1 b_2 z_2^2$$

$$z_1 = \tfrac{1}{2}\left(- \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} + \frac{v_1}{b_1} - \frac{v_2}{b_2}\right)$$

$$z_2 = \tfrac{1}{2}\left(- \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{v_1}{b_1} - \frac{v_2}{b_2}\right)$$

ஆகும். கடைசி இரண்டுத் தொடர்புகளிலிருந்து $0 \leqslant z_1 \leqslant 1$ என்றும் $-\frac{1}{2} \leqslant z_2 \leqslant \frac{1}{2}$ என்றும் z_1, z_2 என்ற மாறிகளின் வரம்புகளை தீர்மானிக்கலாம்.

அடுத்து, இம்முறையைப் பயன்படுத்தும் போது கொடுக்கப் பட்ட நேரியவல்லாத சார்பைத் தோராயமாக நேரியச்சார்புகளின் சேர்க்கையாகப் பிரித்தெழுத எத்துணைப் பிரிப்புப் புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்ள வேண்டுமென்பது தீர்மானிக்கப் படவேண்டும். பொதுவாக 4 முதல் 6 புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வது நலம் இப் புள்ளிகளை அதிகரிப்பதால் சார்பின் மதிப்புகளை மேலும் சிறப்புறச் செய்யலாம் என்றாலும் கம்ப்யூட்டர் ஓடும் நேரம் இதைச் சார்ந்து கூடுதல் ஆகும் வாய்ப்பு உள்ளது. பிரிக்கும் புள்ளிகள் சமதூரங் களில் இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. எந்த நேரியவல்லாத சார்பும் வரைப்படத்தின் அடுத்தடுத்த 4 புள்ளிகளின் மூலமாக முப்படிக்

கோவையொன்றுகவோ அல்லது அடுத்தடுத்த 3 புள்ளிகளின் மூலமாக இருபடிக் கோவையெப்ன்றுகவோ கொள்ளப்படலாம்.

வலப்புற அல்லது குறிக்கோள் சார்புக்கான துணையலகு நெறிப் படுத்துதலைப் பிரித்து நெறிப்படுத்துதல் முறையைக் கையாளும் போதும் பயன்படுத்தலாம். ஆனல் வழக்கமான துணையலகு முறை களில் சில மாற்றங்கள் தேவைப்பகின்றன. தனி மாறியொன்று அடிப்படையை விட்டு நீக்கப்படும் போது அந்தச் சேர்க்கையைச் சேர்ந்த அண்டைத்தனி மாறி (adjacent special variable) அடிப் படையில் உட்புகத் தகுதி பெறுகிறது. ஆகவே இத்தனி மாறியின் குறைக்கப்பட்ட செலவுக்கெழு ஆராயப்படவேண்டும். அது குறை யெண் என்றுல் ஓரிடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வுகளின் கணம் பெறப்பட்டதாகக் கொள்ளவேண்டும். துணையலகு நெறிப் படுத்தும் முறையைத் தொடர்ந்து நடைமுறைப் பிரச்சினையின் துணையலகின் மதிப்பை மீண்டும் மீண்டும் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு காணும் முறைக்கு உட்படுத்தவேண்டும். வலப்புறத் துணை யலகு நெறிப்படுத்துதலில் அடிப்படையிலிருந்து நீங்கும் மாறியை ஒவ்வொரு நிலையிலும் முதற்கண் தேர்ந்தெடுப்பதால் அடிப்படை யில் உட்புகத் தகுதி பெறும் தனிமாறிகளைத் தேர்ந்தெடுக் கும்போது அவற்றை (நீங்கும் மாறிகளை அடிப்படையிலிருந்து அறவே நீக்கப்பட்டதாகவே கொண்டு கணக்கீடுகளைச்செய்கிறேம்.

10·3 முழுவெண் நெறிப்படுத்துதல்: (Integer Programming)

பல நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளில் சில மாறிகளுக்கு அல்லது அனைத்து மாறிகளுக்கும் முழுவெண் அல்லாத மதிப்புகள் பொருளற்றவையாகவோ அல்லது உண்மை நிலைக்குப் புறம்பான வையாகவோ இருக்கலாம். சேர்க்கைகள் (combinations) தொடர் பான எல்லாப் பிரச்சினைகளுமே இம்மாதிரியானவை. நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையொன்றில் அனைத்து மாறிகளும் முழு வெண் மதிப்புகளையே ஏற்க வேண்டும் என்றுல் அதைத் தூய முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் (pure Integer programming) பிரச்சினை என்றும், சில மாறிகள் மட்டும் முழுவெண் மதிப்புகளை ஏற்று எஞ்சியவை எம்மதிப்புகளையும் ஏற்றுல் அதைக் கலப்பு முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் (mixed integer programming) பிரச்சினை என்றும் கூறுகிறேம்.

முழுவெண் மாறி ஒன்று 0 அல்லது 1 என்ற மதிப்புகளை மட்டுமே ஏற்கவல்லது என்றுல் அதை 0-1 மாறி என்கிறேம். எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட சில கட்டுப்பாடுகளுக்கு

இணங்கச் சிலபொருள்களின் லாபகரமான சேர்க்கையைக் காண, அச்சேர்க்கையில் i-வது பொருள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை x_i என்று குறிப்போம். இந்த நிலையில் x_i-க்கு 0 அல்லது 1 [சேர்க்கையில் i-வது பொருள் இருந்தால் அது உறுதியான (certain) நிகழ்ச்சி என்பதால் நிகழ்தகவு 1 ஆகும்.; அது சேர்க்கையில் இல்லை என்றால் அது நிச்சயமாக நிகழாதது என்பதால் நிகழ்தகவு 0 ஆகும்] என்ற மதிப்புகளையே ஏற்கக்கூடும். விமானப் பணியாளர்களின் பணி ஒதுக்கீடு தொடர்பான பிரச்சினைகளிலும் 0-1 மாறிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இத்தகு பிரச்சினைகள் யாவற்றிலும் முழுவெண் நெறிப்படுத்துதல் தேவையாகிறது.

எளிமையான பிரச்சினைகளும்கூட, மாறிகள் முழுஎண்களாக இருத்தல் வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாட்டை உட்புகுத்தும்போது, அதாவது, முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாற்றப்படும் போது, பல புதியமாறிகளும் கட்டுப்பாடுகளும் வரையறுக்கப்படுவது இன்றியமையாததாக ஆகிவிடுவதால், மிகவும் சிக்கலான பிரச்சினைகளாக அமைந்துவிடுகின்றன.

சில பிரச்சினைகளின் குறிக்கோள்சார்பு குவி தன்மைபெறாததாக இருக்கலாம். குறிப்பாக, அவை நிலையான கட்டணங்களைப் (fixed charges) பற்றியதாகவும் இருக்கலாம். ஒரு செயல்முறை மாறி x–ன் மதிப்புகள் 0–க்கும் k–க்கும்இடையில் இருக்கும்போது cx என்ற செலவில் நிகழலாம் என்று எடுத்துக் கொள்வோம். 0–க்குச் சமமில்லாத செயல்முறை மட்டத்தில் அத்துடன் f என்ற நிலையான கட்டணம் தொடர்பு பெற்றிருக்கிறது என்றும் கொள்வோம். δ என்னும் 0-1 மாறியைச் செயல்முறையின் நிகழ்தகவைக் குறிப்பதற்கு எடுத்துக்கொண்டு, செலவை $cx + f\delta$ என்ற சார்பினால் குறிக்கிறோம். $x < k\delta$ என்ற கட்டுப்பாடு இப்பொழுது உட்புகுத்தப்படவேண்டும். அப்பொழுதுதான் $\delta = 1$ என்பது $x \neq 0$ என்னும்போது உண்மையாகும். இதன் காரணமாகப் பிரச்சினை முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாறுகிறது.

மேலும் பிரித்து நெறிப்படுத்துதல் ஓரிடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வைக் கொடுக்கும் சந்தர்ப்பங்களில் முழுவெண் நெறிப் படுத்துதல் முறைகள் பயன்படுத்தப்பட்டால் அனைத்திடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு கிடைக்கும். ஆனால் நிச்சயமாக, இம் மாதிரி மாற்றும்போது, கணக்கீடுகளின் சுமை கணிசமாக அதிகரிக்கிறது.

அதன் மிக எளிய அமைப்பில் முழுஎண் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை வழக்கமான குறியீட்டில் பின்வருமாறு அமைக்க

லாம் : cX-ஐ $AX = b$; $X > O$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க மீச்சிறுமப்படுத்துவதும், இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வின் கெழுக்கள் யாவும் முழுஎண்கள் என்றும் (நேரியவல்லாத) கட்டுப் பாட்டை நிறைவு செய்வதுமான தீர்வு X- ஐக் காண்க.

வடிவ கணிதமுறையில் இப் பிரச்சினையை ஓர் எடுத்துக் காட்டின்மூலம் (Gass) விளக்குவோம்.

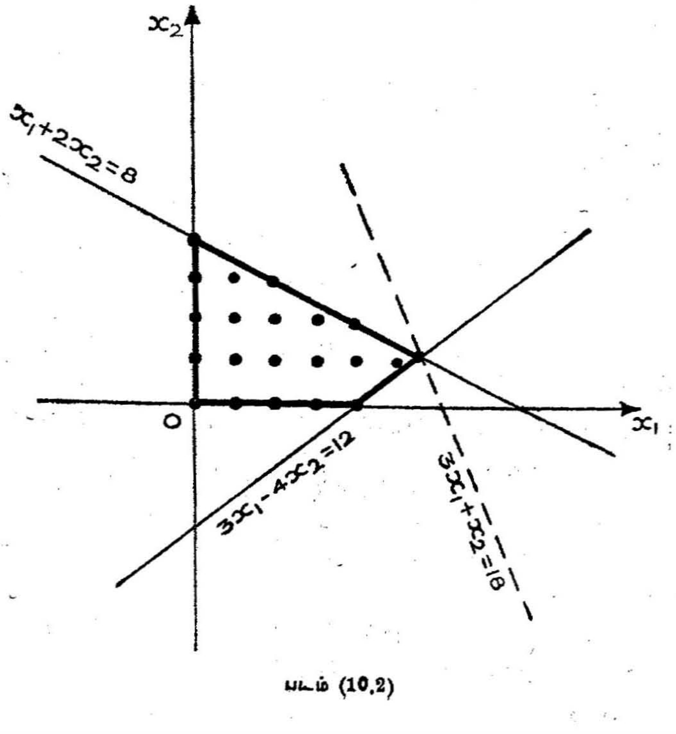
$$3x_1 + x_2$$

என்னும் சார்பை மீப்பெருமப்படுத்துவதும்,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &< 8 \\ 3x_1 - 4x_2 &< 12 \\ x_1 &> 0 \\ x_2 &> 0 \end{aligned}$$

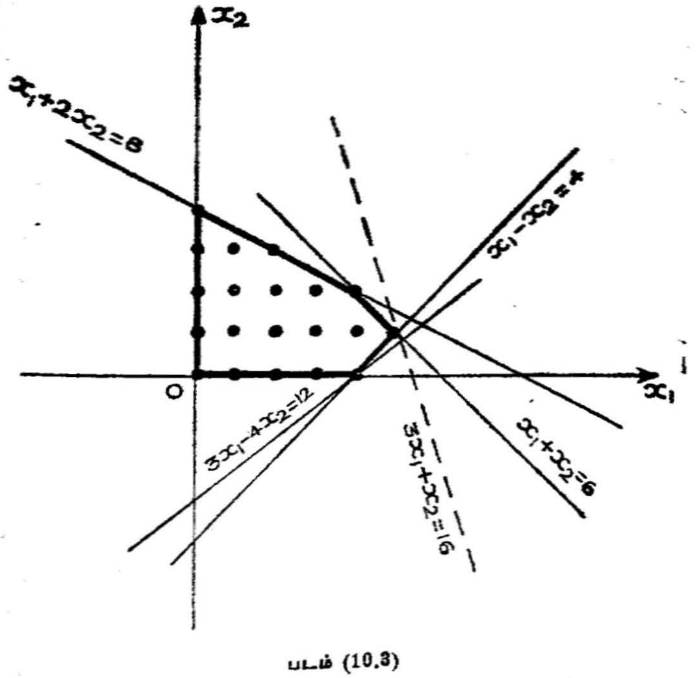
என்ற கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்வதுமான முழுவெண் தீர்வு காணுதல் வேண்டும் என்போம்.

முழுவெண் அல்லாத இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வு $x_1 = \frac{28}{5}$; $x_2 = \frac{6}{5}$ என்றும் மீப்பெருமதிப்பு 18 என்றும் படம் (10.2)-ல்



படம் (10.2)

காட்டியவாறு அறியலாம். செய்தக்க தீர்வுகள் அடங்கும் குவிகணம் தடித்த கோடுகளால் வரம்பிடப்பட்டுள்ளது. இந்தப் பிரதேசத்தில் உள்ள முழு எண் ஆயத்தொலைப் புள்ளிகளும் தடித்த புள்ளிகளால் (heavy dots) காட்டப்பட்டுள்ளன. இப் புள்ளிகளுள் எந்தவிடத்துக் குறிக்கோள் சார்பு மீப்பெரு மதிப்பைப் பெறுகிறது என்பதைக் காண்பதே நமது பிரச்சினையாகும். படம் (10.3)-ல்



படம் (10.3)

இரண்டு கூடுதல் கட்டுப்பாடுகளை உட்புகுத்திப் பிரச்சினையின் தீர்வு காணப்பட்டுள்ளது. இதுவே கோமரி (Gomory) என்பாரின் வெட்டுந்தள முறையாகும். $x_1 = 5, x_2 = 1$ என்னும் புள்ளியில் மீப்பெரு மதிப்பு 16 கிடைப்பதுடன் தீர்வும் முழுவெண்களால் ஆனது என்று தெரிகிறது.

கலப்பு முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை அமைத்தல்

ஒரு மாறியின் நேரியவல்லாத சார்புகளுக்குக் கலப்பு முழு வெண் நெறிப்படுத்துதல் பல்வேறு முறைகளில் அமைக்கப்படலாம். இங்கு மூன்று முறைகள் விவரிக்கப்படுகின்றன :

(i) இந்தமுறை, பிரித்து நெறிப்படுத்தும்போது நம்மால் கையாளப்பட்டது ஆகும். ஆனால், இப்பொழுது அடிப்படையில் நுழைக்கப்படும் தனி மாறிகள் நம் விருப்பம்போல் அல்லாமல் சில கூடுதலான கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கின்ற முழுவெண் களாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. படம் (10·4)–ல் காட்டிய வாறு செலவுச் சார்பு (cost function) $c(z)$–ஐ நேரிய சார்பு களின் சேர்க்கையாக எழுதக்கூடும் என்க. இச்சார்புக்கான வளை வரை $P_0, P_1, \ldots, P_6$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்கிறது. பிரித்து நெறிப்படுத்துதல் முறையில் செய்ததுபோல் λ_i என்ற மாறிகளை P_i-களின் நிறைகளாக (weights) வரையறுத்துப் பின் வரும் சமன்பாடுகளை அமைக்கின்றோம் :

$$\Sigma \lambda_i = 1 \tag{10·5}$$

$$\Sigma h_i \lambda_i = z \tag{10·6}$$

$$\Sigma k_i \lambda_i = c(z) \tag{10.7}$$

இங்கு (h_i, k_i) என்பது P_i–ன் ஆயத் தொலைகளாகும். சமன் பாடுகள் (10·5), (10·6)–களை முறையே குவிநிரை, தொடர்பு நிரை என்று கூறுகிறோம். சமன்பாடு (10.5) பிரச்சினையில் வெளிப் படையாகத் தோன்றும். தேவையானால் z-ஐ அது குறிப்பிடும் மற்ற மாறிகளின் நேரிய சேர்க்கையாக மாற்றி சமன்பாடு (10.6)-ஐ உபயோகிக்கிறோம். சமன்பாடு (10.7) குறிக்கோள் சார் பில் பயன்படுத்தப்படும்.

இறுதிச் சிறப்புத் தீர்விலிருந்து λ-மாறிகளின் ஒழுங்கற்ற சேர்க்கைகள் நீக்கப்படும் முறையில்தான் பிரித்து நெறிப்படுத்து தலுக்கும், முழுவெண் நெறிப்படுத்துதலுக்கும் இடையேயுள்ள முக்கிய வேறுபாடு ஆகும். இப்பொழுது (முழுவெண் நெறிப் படுத்துதலில்) புதிய அடிப்படை மாறிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க முழு வெண் மாறிகளில் கட்டுப்பாடுகள் கொணரப்படுகின்றன. $c(z)$-ன் வளைவரைத் துண்டு துண்டாக (piecewise)குவிசார்பாக இருப்பதால் இவற்றுள் எத்துண்டைப் பயன்படுத்துவது என்பதைத் தீர்மானிக்க முடியுமானால் கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினை சாதாரண நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாக மாறிவிடும். படம் (10·4)-ல் $c(z)$-ன் வளைவரை மூன்று துண்டங்களாக—$P_0 P_1$, $P_1 P_2 P_3 P_4$, $P_4 P_5 P_6$– பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொன்றும் ஒரு குவிசார்பைக் குறிப்பதைக் காணலாம். வளைவரை 3 துண்டங்களாகப் பிரிக்கப்படுவதால் இறுதித் தீர்வு முறையே இத் துண்டங்களில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவுகளை δ_1, δ_2, δ_3 என்ற 0-1 மாறிகளாக எடுத்துக் கொண்டு பின்வரும் கூடுதல் கட்டுப்பாடுகளை அமைக்கிறோம் :

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1 \quad (10\cdot8)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_6 & \leqslant \delta_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \leqslant \delta_1 + \delta_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 & \leqslant \delta_2 + \delta_3 \\ \lambda_5 + \lambda_6 & \leqslant \delta_3 \end{array}\right\} \quad (10\cdot9)$$

இக் கட்டுப்பாடுகளிலிருந்து ஏதாவது $\delta_i = 1$ என்று இருந்தால் P_i-க்குச்சரியான λ_i அத்துடன் ஒத்த குவிதுண்டத்திற்கு வெளியே பூச்சியம் ஆகவேண்டும் என்று கூறலாம். இந்த அமைப்பில் ஒரு நல்ல முதனிலைத் தீர்வை δ_i-களைச் சாதாரணத் தொடர்ச்சி பெற்ற மாறிகளாகக்கொண்டு பிரித்து நெறிப்படுத்துதலைப் பயன்படுத்திக் காணக்கூடும்.

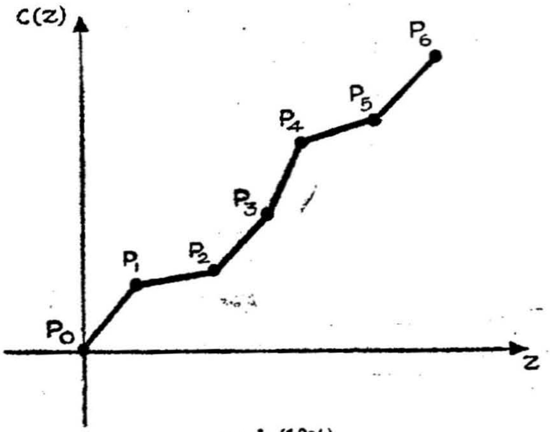
(ii) இந்தமுறையில் படிக்கட்டுச் சார்புகளைப் (step functions) பயன்படுத்துகிறோம். அதாவது $c(z)$-ஐத் தனித்தனியே மாறிலிச் சார்புகளின் சேர்க்கையாக (படம் 10·5-ப் பார்க்கவும்) எழுதித் தீர்வு காண முயல்கிறோம். முன்போலவே, P_i-களின் ஆயத்தொலைகளை (h_i, k_i) என்று எடுத்துக்கொள்வோம். λ_i-களை 0—1 மாறிகளாகக் கொண்டு சமன்பாடு (10·6)-க்குப் பதில்

$$\Sigma\, h_i\, \lambda_i \geqslant z$$

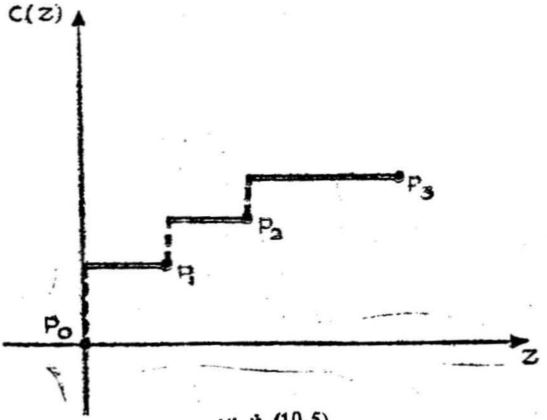
என எழுதுகிறோம். கட்டுப்பாடுகள் (10·8), (10·9) அறவே நீக்கப்பட்டுவிடுகின்றன. சமன்பாடு (10·5) இன்றியமையாதது என்றில்லாவிட்டாலும் அதையும் எடுத்துக்கொண்டால் இறுதித்தீர்வை எளிதில் அடையலாம்.

(iii) இப்பொழுது படம் (10·6)-ல் காட்டியவாறு $c(z)$ ஒருசில தொடர்பற்ற நேர்கோடுகளாலும் (disconnected straight lines) விடுபட்ட தனிப் புள்ளிகளாலும் (isolated points) தோராயமாகக் குறிக்கப்படுகிறது என்று கொள்கிறோம். நடைமுறையில் ஆதி ஒரு விடுபட்ட தனிப் புள்ளியாகவே எடுத்துக்கொள்ளப்படும். புள்ளி P_1-ன் z-கூறும் 0 ஆக இருக்கலாம். P_2, P_3–ஒன்று மற்றதன் மீதுப் பதிந்தும் இருக்கலாம். i-வது கோட்டின் இரு முனைகளையும் P_{2i-1}, P_{2i} என்று எழுதுகிறோம். P_{2i-1}, P_{2i} ஆகிய இருமுனைகளும் ஒன்றோடொன்று பொருந்திய கோட்டுத் துண்டாக விடுபட்ட புள்ளிகளைக் கருதலாம்.

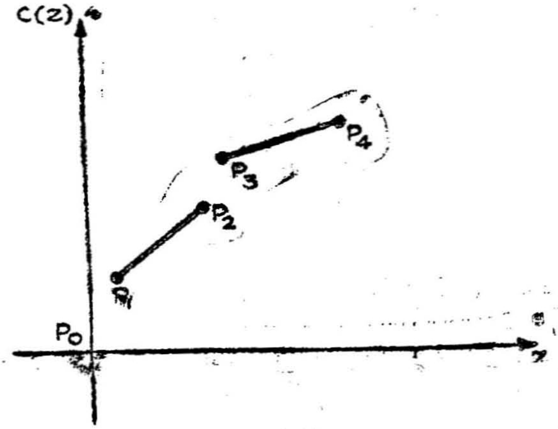
ஒவ்வொரு கோட்டுத் துண்டிற்கும் ஒரு 0—1 மாறி δ_i-ஐயும், விடுபட்ட தனிப்புள்ளியாக மாறுத கோட்டுத் துண்டுகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் தொடர்ச்சி பெற்ற மாறி u_i-ஐயும் உட்புகுத்திப் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளை அமைக்கிறோம் :



படம் (10·4)



படம் (10.5)



படம் (10·6)

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\, \delta_i = 1 \\ &\Sigma\, h_{2i-1}\, \delta_i + \Sigma\, u_i = z \\ &\Sigma\, k_{2i-1}\, \delta_i + \Sigma\, c_i\, u_i = c(z) \\ &u_i < (h_{2i}-h_{2i-1})\, \delta_i \end{aligned}\right\} \qquad (10{\cdot}10)$$

இங்கு

$$c_i = (k_{2i}-k_{2i-1}) \,/\, (h_{2i}-h_{2i-1})$$

$=$ நேர்கோட்டுத்துண்டு $P_{2i-1}\, P_{2i}$-ன் சரிவு என்றும்

(10·10)-ன் கடைசிச் சமனின்மை $h_{2i-1} \neq h_{2i}$ என்றவாறுள்ள i-க்கு மட்டும் உண்மை என்றும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

இம் மூன்று முறைகளுள் எது சிறந்தது என்பது பிரச்சினையைப் பொறுத்தது. இரண்டாவது முறையில் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கை குறைவது உண்மையே. இருப்பினும் பிரச்சினையின் முழு எண் மாறிகளின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருப்பது இதைவிட முக்கியமாகும். எனவே, மற்ற முறைகளில் முழுஎண் மாறிகளின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருக்குமாறு $c\,(z)$-ன் உருவை அமைக்கலாம் என்றால் அவற்றையே பின்பற்றுதல் நலம்.

இனி முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காணும் சில முறைகளைப்பற்றிச் சிறிது ஆராய்வோம்.

வெட்டும் தளமுறை (Cutting Plane Method)

மார்டின்-கோமரி முறை அல்லது வெட்டுந்தள முறை முழுவெண் மதிப்புகளையே ஏற்கும் மாறிகளையும், முழுவெண்களையே கட்டுப்பாடுகளின் கெழுக்களாகவும் கொண்ட பிரச்சினைகளின் தீர்வு காண உதவுகிறது. நடைமுறையில் இந்த முழுவெண்கள் சிறு எண்களாக இருத்தல் வேண்டும். இல்லாவிட்டால், அடிப்படையின் அணிக்கோவை மிகப்பெரிய எண்ணாக மாறிவிடுவதால் இந்த முறை பயனற்றதாகிவிடுகிறது.

மாறிகள் முழுவெண்களாக இருக்க வேண்டும் என்ற கட்டுப்பாட்டை நீக்கிவிட்டு முதலில் தீர்வு காண்கிறோம். இறுதித் தீர்வு முழுவெண் தீர்வு அன்று என்றால் நடைமுறைச் சோதனைத்தீர்வு நிறைவு செய்யாததும், ஆனால் எந்த உண்மையான செய்தக்க தீர்வும் நிறைவு செய்ய வேண்டியதுமான ஒரு கூடுதலான கட்டுப்பாட்டை அமைத்துக்கொண்டு பிரச்சினைக்கு மறு தீர்வு காண்கிறோம்.

z_j-க்களை அடிப்படையல்லா மாறிகள் என்றும் X_i-களை அடிப் படை மாறிகள் என்றும் கொண்டு இறுதிநிலை அட்டவணையை வழக்கமான குறியீட்டில்

$$x_0 = x_{00} + \Sigma\, x_{0j}\,(-z_j)$$
$$X_i = x_{i0} + \Sigma\, x_{ij}\,(-z_j)$$

என்று எழுதுவோம். x_0 மீப்பெரு மதிப்புக் காணப்பட வேண்டிய குறிக்கோள் சார்பு ஆகும்.

$$x_{ij} = n_{ij} + f_{ij}$$

என்று n_{ij} என்ற முழுஎண், $0 \leqslant f_{ij} < 1$ என்ற பின்னம் ஆகிய வற்றின் கூடுதலாக எழுதப்படுகிறது என்க. நடைமுறைச் சோதனைத் தீர்வில் X_i முழுஎண் மதிப்பை ஏற்கவில்லை என்றால், அதாவது, $f_{i0} \neq 0$ என்றால்,

$$s = -f_{i0} + \Sigma\, f_{ij}\, z_j$$

என்க. இது ஒரு முழுஎண் ஆகும். ஏனெனில் இதற்கும் $-X_i$-க் கும் உள்ள வேறுபாடு ஒரு முழுஎண். தவிரவும் இதன் மதிப்பு $-f_{i0}$-ஐ விடக் குறைவாக இருக்க முடியாது. காரணம், $\Sigma\, f_{ij}\, z_j$ குறையல்லாதது. $-f_{i0}$-ஐ விடக் குறைவில்லாத மிகச்சிறிய முழு எண் பூச்சியம் என்பதால் $s \geqslant 0$ என்று கிடைக்கிறது. இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட குறையல்லா முழுஎண் மாறி s-ஐப் பிரச்சினை யின் புதிய அடிப்படையல்லா மாறியாக்கலாம். இந்த வெட்டுமுறை அட்டவணையின் ஓர் அடிப்படை மாறிக்கான சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்பட்டது. ஆனால், அடிப்படை மாறிகளின் மிகை அல்லது குறை முழுஎண் சேர்க்கையிலிருந்தும் இந்த வெட்டுமுறையைப் பெறலாம் என்றும், அடிப்படை அணிக்கோவையின் மதிப்பு D என்றால் $D-1$ இத்தகு வெட்டுகள் இருக்கும் என்றும் கோமரி கூறு கிறார். அவர், மேலும், இந்த வெட்டுகள் அனைத்தும் ஒரே அடிப் படை மாறியின் மடங்குகளால் பெரும்பாலும் பெறப்படலாம் என்பதையும் நிரூபித்துள்ளார்.

மார்டினின் விளக்க முறையில் வெட்டைப் பின்வருமாறு தேர்ந்தெடுக்கிறோம். X_i என்ற அடிப்படை மாறியின் மதிப்பு x_{i0} முழு எண் அன்று என்போம். $f_{ij} \neq 0$ என்று உள்ள அனைத்து நிரல்களுள்ளும் மிகக்குறைந்த மதிப்புப்பெற்ற x_{0j} உள்ள j-வது நிரல் மைய நிரல் எனப்படும். z_j-ன் கெழுவின் பின்னப்பகுதி மிகக்குறைந்த மிகை மதிப்பை ஏற்கின்ற X_i-ன் மடங்கிற்கான கோவையிலிருந்து வெட்டைப் பெறவேண்டும். இதன்பின்னர் இந்தக் கெழுவை அது இருமை செய்தக்க தன்மையைப் பாதிப்ப தாக விருந்தாலும் மைய உறுப்பாகப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

அணிக்கோவையின் புதிய மதிப்பு பழைய மதிப்பை மைய உறுப்பின் மட்டு மதிப்பால் பெருக்கியதற்குச் சமமாகும். மைய உறுப்பு சிறிய பின்னமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதால் D-ன் மதிப்பு வெகுவாகக் குறைக்கப்பட்டுவிடும். $D = 1$ என்றால் சோதனைத் தீர்வு முழுவெண் தீர்வாக வேண்டும். எனவே, இந்த நிலையில் D ஒன்றுக்குச் சமமாக விருந்தாலும், இல்லாவிட்டாலும் சோதனைத் தீர்வு முழுவெண் தீர்வாக இருப்பதற்கு வாய்ப்பிருக்கிறது. சோதனைத்தீர்வு முழுவெண் தீர்வு அன்று என்றால் மேலும் வெட்டுகளை முழுவெண் தீர்வு கிடைக்கும்வரை இம்மாதிரியே பயன்படுத்துகிறோம். எல்லா மாறிகளும் முழுஎண்களாகச் சோதனைத்தீர்வில் கிடைக்கின்ற வரை குறையல்லாத் தன்மையை உட்புகுத்தும் முயற்சி செய்யப்படமாட்டாது.

அடிப்படையின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு D-ஐ வேகமாகக் குறைவுறச் செய்யச்சிலசிறப்பு வழிமுறைகளும் காணப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் விளக்கங்கள் § 10 1-ல் குறிப்பிடப்பட்ட ஹாட்லியின் நூலிலிருந்து அறியலாம். காஸின் நூலில் கோமரியின் எடுத்துக்காட்டு ஒன்றும் விரிவாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

பகுதிக் கணக்கெடுப்பு முறைகள் (Partial Enumeration Methods)

0 — 1 மாறிகளையே கொண்ட முழுவெண் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காண்பதில் இம்முறைகள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

$$y_i = b_i + \sum_j a_{ij} x_j \geqslant 0$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க,

$$y_o = b_o + \sum_j a_{oj} x_j$$

என்ற குறிக்கோள் சார்பின் மீப்பெரு மதிப்புக் காண்பதே நமது பிரச்சினை என்றும் அனைத்து x_j-க்களும் $0 - 1$ மாறிகள் என்றும் கொள்வோம். ஏதாவது x_k $0 - 1$ மாறியாக இல்லாமல் இருந்து 0–க்கும் $2^{N_k} - 1$-க்கும் இடையில் இருந்தால் $x_k = \sum_{i=0}^{N_k-1} 2_i \; x_{ki}$ என்று எழுதி அதனிடத்து x_{ki} என்னும் N_k, $0 - 1$ மாறிகளை உட்புகுத்துகிறோம். மேலும் தேவையானால் x_j-ஐ $1 - x_j$ என மாற்றி, பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாதவகையில் அனைத்து j-க்கும் $a_{oj} \leqslant 0$ என்று எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

y_0-ஐ y_{0c} என்று கொடுக்கும் ஒரு சிறப்பு நடைமுறைத் தீர்வு தரப்பட்டுள்ளது என்றும் மாறிகளைப் பின்வருமாறு மூன்று கணங்களாகப் பிரித்துப் பல உட் பிரச்சினைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்றும் கொள்வோம்.

$$S_0 = \left\{ x_j : x_j = 0 \right\}$$

$$S_1 = \left\{ x_j : x_j = 1 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ x_j : x_j\text{-க்கு எந்த மதிப்பும் தீர்மானிக்கப் படவில்லை ; அது தாற்காலிகமாக 0 மதிப்பை ஏற்றிருக்கிறது.} \right\}$$

நடைமுறை நிலையில் y_i-களின் மதிப்புகள் v_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ என்றும் $U_1, U_2, \ldots$ என்பன S_2-ல் உள்ள மாறிகளின் மதிப்புகளை மாற்றுவதால் $y_1, y_2, \ldots$ என்பன முறையே ஏற்கும் வாய்ப்புப் பெற்றுள்ள மீப்பெரு மதிப்புகள் என்றும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$U_i = v_i + \sum_{j,\, x_j \in S_2} \text{மீப்பெருமம்}\ (0, a_{ij})$$

என்று கிடைக்கிறது.

முதனிலையில் $y_{0c} = -\infty$ என்று கொள்கிறோம். இப்பொழுது எல்லா மாறிகளையும் S_2-ல் கொண்ட உட்பிரச்சினை கிடைக்கிறது. இதையடுத்தக் கணக்கீட்டு முறைகளைப் பின்வருமாறு வரிசைப் படுத்தலாம்.

படி (i): ஏதாவதொரு உட்பிரச்சினையை எடுத்துக்கொள்க. $v_0 \leq y_0c$ என்றால் அதைவிடுத்து வேறொரு உட்பிரச்சினையை எடுத்துக்கொள்க. $v_0 > y_0c$ என்றால், அனைத்து $i > 1$-க்கும் $v_i > 0$ என்னும்போது ஒரு புதிய சிறப்புத் தீர்வு கிடைக்கிறது. இனி இந்த உட்பிரச்சினையில் ஏதும் முன்னேற்றம் காணமுடியாது. எல்லா j-க்கும் $a_{0j} \leq 0$ என்றிருப்பதால் கணம் S_2-ல் உள்ள எந்த மாறியையும் 0-ஐத் தவிர வேறு மதிப்பு (அதாவது 1) ஏற்குமாறு செய்வதால் எந்தவிதப் பயனும் ஏற்படாது.

படி (ii): $a_{0j} < y_0c - v_0$ என்பது ஏதாவது j-க்கு உண்மையானால் x_j-ஐ S_0-க்கு மாற்றி U_i-களின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக. ஏனென்றால் $x_j = 1$ என்று எடுத்துக்கொண்டு இந்த உட்பிரச்சினையிலிருந்து காணப்படும் தீர்வு முன்னரே கண்ட தீர்வைவிடச் சிறந்ததாக அமைந்துவிடாது.

படி (iii): ஏதாவது $U_i < 0$ என்றால் உட் பிரச்சினைக்குச் செய்தக்க தீர்வு கிடையாது. எனவே, அதை விட்டுவிடவேண்டும். மேலும், $U_i + a_{ij} < 0$ என்று ஏதாவது ஒரு i-க்கு இருக்குமானால் $x_j = 1$ என்னும்போது பிரச்சினை செய்தக்கதல்ல என்பதால் அந்த மாறியை S_0-க்கு மாற்றி U_i-களின் மதிப்புகளைத் திருத்தியமைக்கின்றோம். ஏதாவது மாறி இந்தப்படியில் S_0-க்கு மாற்றப்பட்டால் ஏதாவது $U_i < 0$ என்று ஆகும் வரை அல்லது எல்லாக் கட்டுப்பாடுகளும் ஆராயப்படும்வரை ஒவ்வொரு கட்டுப்பாடாக ஆராய்ந்து அடுத்த படிக்குச் செல்க.

படி (iv): ஏதாவது i-க்கு $U_i - a_{ij} < 0$ என்றால், அடிக்குறி j-க்கு ஒத்த x_j-க்களை S_1-ல் வைக்கவும். ஏனென்றால் $x_j = 0$ என்னும்போது இந்நிலையில் உட்பிரச்சினை செய்தக்க தன்மையை இழந்து விடுகிறது. V_i, U_i-களின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக (இம்மாதிரி x_j இருந்தால்).

படி (v): சென்ற படியில் எந்த x_j-ம் S_1-க்கு ஒதுக்கப்படவில்லை என்றால் S_2-ல் இருந்து ஏதாவதொரு மாறியை S_1-க்கு மாற்றி மற்றெல்லா விதத்திலும் நடைமுறைப் பிரச்சினையையே ஒத்த ஒரு புதிய உட்பிரச்சினையை அமைக்கின்றோம். திரும்பவும் மேலேகண்ட செயல்முறைகளுக்கு இப் புது உட்பிரச்சினையை உட்படுத்துகின்றோம்.

கிளை - வரம்பு முறை (Branch and Bound Method)

முழு எண் மாறிகளுக்கு மேல்-கீழ் வரம்புகள் வரையறுக்கப்பட்ட பல சாதாரண நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளின் தொடரை அமைத்துத் தீர்வு காணும் முறை இது. தொடக்கநிலையில் இவ் விரு வரம்புகளும் உண்மைத் தீர்வை உள்ளடக்குவதற்கு ஏற்றவாறு வேறுபாடுடையனவாக எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டு பிரச்சினை அமைக்கப்படுகிறது. பொதுவாக, கணக்கீடுகளின் முந்திய படிகளில் இம்மாதிரிப் பிரச்சினைகளுக்கான பட்டியல் ஒன்று தோற்றுவிக்கப்பட்டிருக்கும். குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு மீப்பெருமமாகி x_{0c}-க்குச் சமமாகுமாறு ஒரு செய்தக்க, சிறந்த நடைமுறைத் தீர்வும் தேவையாகிறது. இம்மாதிரி ஒரு தீர்வு அறியாத நிலையில் $x_0c = -\infty$ என்றே எடுத்துக்கொள்ளலாம். மற்றக் கணக்கீடுகள் வருமாறு :

படி (i): பட்டியலில் ஏதும் பிரச்சினை இல்லை என்றால் நடைமுறைத் தீர்வே இறுதித் தீர்வும் ஆகும். ஏதாவது பிரச்சினை இருந்தால் அவற்றுள் ஒன்றின் தீர்வு காண்க.

படி (ii) : குறிக்கோள் சார்பின் நடைமுறை மதிப்பைக் கணக்கிடுக. இது x_{0c}-க்குச் சமம் அல்லது குறைவு என்றால் பிரச்சினையில் மேற்கொண்டு ஏதும் செய்வதற்கில்லை.

படி (iii) : படி (ii)-ல் கூறியது உண்மையல்ல என்றால் முழு எண்ணுகை இருக்கவேண்டிய மாறிகள் அனைத்தும் தோராயமாக முழு எண் மதிப்புகளை ஏற்கின்றனவா என்று ஆராய்க. ஆம் என்றால், ஒரு புதிய செய்தக்க தீர்வும் x_{0c}-க்கு ஒரு புதிய மதிப்பும் கிடைக்கின்றன.

படி (iv) : நடைமுறைக் குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு x_{0c}-ஐ விட அதிகமாக இருந்தால் அல்லது தீர்வில் முழு எண்களாக இருக்கவேண்டிய மாறிகள் ஏற்கமுடியாத பின்ன மதிப்புகளாக இருந்தால் பட்டியலில் மேலும் இரண்டு பிரச்சினைகளை உட்புகுத்து கிறோம்.

$X_i = x_{i0}$ = ஏற்கமுடியாத பின்னம் என்றால் ஒரு பிரச்சினையில் மேல்வரம்பு x_{i0}-ன் முழு எண் பகுதியாகுமாறு மாற்றப்படுகிறது. இரண்டாவது பிரச்சினையில் கீழ் வரம்பு x_{i0}-ன் முழு எண் பகுதியுடன் 1-ஐக் கூட்டியதாக மாற்றப்படுகிறது. இம் மாற்றத்தைத்தவிர இவ்விரண்டு புதிய பிரச்சினைகளும் நடைமுறைப் பிரச்சினைக்கு எல்லாவிதத்திலும் சமமானவை. மேலும், இம் முறையைப்பற்றிய விவரங்களை பீலின் (Beale) § 10·1-ல் குறிப்பிட்ட நூலில் கண்டறியலாம்.

10·4. கூறுக்கச் சிதைவு (Decomposition)

எந்த நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையையும் சிம்ப்ளக்ஸ் முறைப்படித் தீர்க்க முடியுமென்றாலும் நடைமுறையில் சில வரம்புகளுக்குட்பட்டுச் செயல்பட வேண்டியிருப்பதால் தீர்வு காணும் முயற்சியில் தடைகள் ஏற்படுகின்றன. இப்படிப்பட்ட வரம்புகளில் முக்கியமானது பிரச்சினைகளின் பரிமாணத்தைப் பற்றியதாகும். பொதுவாகவே எந்த நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் வளர்ச்சியிலும் ஏற்படும் தடங்கல்கள் அப் பிரச்சினையின் அளவோடு தொடர்பு பெற்றனவாகவே இருக்கின்றன. குறிப்பாகத் தகவல்கள் சேகரிப்பதற்கான செலவு அணியை அமைத்தல், செலவுகளைக் கணக்கெடுத்தல், நேரிய மாதிரியாகப் (linear model) பிரச்சினையை அமைக்க அதைத் தகுதியாக்குதல் போன்ற செயல்முறைகளில் ஆய்வாளர் இயல்பான சில கட்டுப்பாடுகளுக்குத் தம்மை உட்படுத்திக் கொள்ள வேண்டிய நிலையில் இருக்கிறார். பெரிய பிரச்சினைகளுக்குத் தீர்வு காணப் பல்வேறு சிறப்பு

முறைகள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. இம் முறைகளுள் மிகவும் முக்கியமான கூறுக்கச் சிதைவு கணக்கீட்டு முறைபற்றி இப் பகுதியில் ஆராய்கிறோம்.

பல பிரச்சினைகளில் ஒரே காலப்பரிவை அல்லது ஒரே உற்பத்திச் சாதனத்தைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகளின் தம்முள் ஒன்றை யொன்று சாராத பல உட்கணங்களின் சேர்க்கையாகக் கட்டுப்பாடுகளை எழுதமுடிகிறது. இந்த உட்கணங்கள் ஒருசில சமன்பாடுகளால் ஒன்றுகத் தொகுக்கப்படுகின்றன. இம்மாதிரி ஒருங்கிணைக்கும் சமன்பாடுகள் (tie-in-equations), மூலப் பொருள்களின் கிடைக்கும் அளவுகள், வரவு செலவு திட்டத்திற்கான கட்டுப்பாடுகள் ஆகியவற்றைக் குறிப்பனவாக இருக்கலாம். இத்தகைய பிரச்சினைகள் வெவ்வேறு சிறுநேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. சிறு பிரச்சினைகளின் ஒருங்கமைத்தீர்வு (joint solution) கூடுதலான சில கட்டுப்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யவேண்டும். படம் (10·7)-ல் கட்டுப்பாடுகளின் கணங்களும் அவற்றிற்குச் சரியான குறிக்கோள் சார்பின் பகுதியும் கட்டங்களால் பிரிக்கப்பட்டுக் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

§ 2·1-ன் குறியீட்டில் $X > O$; $A X = b$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $c X$-ஐ மீச்சிறுமப்படுவதுதான் பிரச்சினை என்போம். படம் (10·7)-ல் குறிக்கப்பட்ட கூறுக்கச் சிதைவு பின்வருமாறு எழுதப்படலாம்:

$X_p > O$ $(p = 0, 1, \ldots, k)$ என்னும் வெக்டர்களை

$$\sum_{p=0}^{k} A_p X_p = b_0 \tag{10·11}$$

$$B_p X_p = b_p, \quad p = 1, 2, \ldots, k \tag{10·12}$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$\sum_{p=0}^{k} C_p X_p \text{ -ன்} \tag{10·13}$$

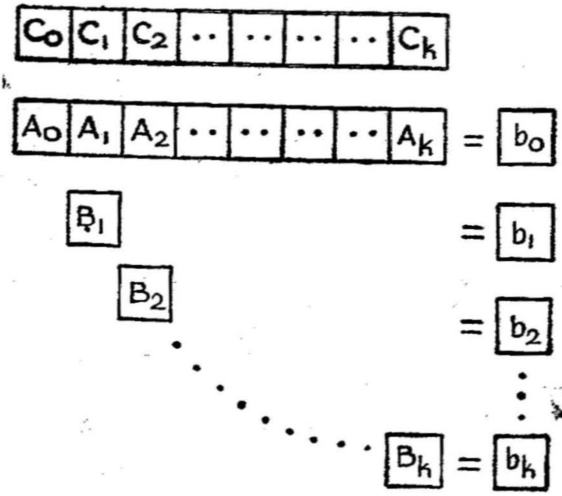
மதிப்பை மீச்சிறுமப்படுத்துமாறு காணவேண்டும். இங்கு A_p, B_p என்பன முறையே $m_0 \times n_p$, $m_p \times n_p$ பரிமாண அணிகள். C_p, b_p, X_p என்பன முறையே n_p-கூறு நிரை, m_p கூறு நிரல், n_p மாறிகளைக் கொண்ட நிரல் வெக்டர்களாகும். $n = \sum_{p=0}^{k} n_p$ என்பது மாறிகளின் மொத்த எண்ணிக்கையையும், $m = \sum_{p=0}^{k} m_p$ என்பது கட்டுப்பாடு

களின் மொத்த எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன. படம் (10.7)-ன் கீழேயே அணிகளின் குறியீட்டில் பிரச்சினை தரப்பட்டுள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

பிரச்சினையின் மூல அமைப்பு

$X > O$; $A X = b$; என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க $c X$-ன் மீச்சிறு மதிப்புக் காண்க.

கூருக்கச் சிதைவு அமைப்பு



$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_k \\ O & B_1 & O & \cdots & O \\ O & O & B_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & B_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

படம் (10.7)

சமன்பாடு (10·12)-ஐ நிறைவு செய்வதும் $X_p > O$ என்றுள்ளதுமான தீர்வுகளின் கணம் S_p என்போம். கொடுக்கப்பட்ட பிரச்

சினையின் தீர்வு ஒவ்வொரு S_p-ல் இருந்தும் ஒவ்வொன்றுகத் தேர்ந்தெடுத்து (10·11)-ஐ நிறைவு செய்வதும் (10.13)-ஐ மீச்சிறுமப் படுத்துவதுமான ஒரு குவிசேர்க்கையாகக் கருதப்படலாம். இதன் காரணமாக கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினை தனித்தனியான k உட்பிரச்சினைகளாகவும், $m_0 + k$ கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்ட புதிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையாகவும் மாற்றப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வோர் உட்பிரச்சினையும் $m_p \times n_p$ அணியைக் கொண்டதாகும். $m = \sum_{p=0}^{k} m_p$ கட்டுப்பாடுகளைக் கொண்ட மூலப்பிரச்சினையின் பரிமாணம் கணிசமாகக் குறைக்கப்பட்டுவிட்டதைக் கவனிக்கவும்.

மேலே விவரித்தவாறு அமைக்கப்பட்ட புதிய பிரச்சினையைத் தலைமைப் பிரச்சினை (master or extremal problem) என்று கூறுகிரோம். இனி, இதன் கணித அமைப்பு என்னவென்பதை விவரிப்போம். p-வது உட்பிரச்சினைக்கு N_p கோடிப்புள்ளிகள் இருக்கின்றன என்றும், X_{pj}, $j = 1, 2, \ldots, N_p$ என்பன தீர்வு வெக்டர்கள் என்றும் கொண்டால், இப் பிரச்சினையின் செய்தக்க தீர்வு X_p கணம் S_p-ன் கோடிப்புள்ளிகளின் ஏதோவொரு குவிசேர்க்கையாக எழுதப்படலாம். எனவே

$$X_p = \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{pj} X_{pj} \tag{10·14}$$

$$\lambda_{pj} > 0; \quad \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{pj} = 1 \tag{10·15}$$

என்று எழுதக்கூடும். பிரச்சினையின் எளிமைக்காகத் தாற்காலிகமாக ஒவ்வொரு S_p-ம் வரம்புடையது என்று கொள்வோம். (10·11), (10.13)-களில் சமன்பாடு (10·14)-ல் இருந்து X_p-க்கு ஈடு செய்தால்,

$$C_0 X_0 + \sum_{p=1}^{k} C_p \left(\sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{pj} X_{pj} \right)$$

என்றும்,

$$A_0 X_0 + \sum_{p=1}^{k} A_p \left(\sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{pj} X_{pj} \right) = b_0$$

என்றும் கிடைக்கின்றன.

அதாவது, இவை முறையே,

$$C_0 X_0 + \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{pj} \; C_p X_{pj} \tag{10·16}$$

$$A_0 X_0 + \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_p} A_p \; X_{pj} \; \lambda_{pj} = b_0 \tag{10·17}$$

என்று மாறுகின்றன. இப்பொழுது,

$$Y_{pj} = A_p X_{pj}; \quad d_{pj} = C_p X_{pj}; \quad (p = 1, 2, \ldots, k) \tag{10·18}$$

என்று வரையறை செய்வோம். (10·16), (10·17), (10·18)-களிலிருந்து தலைமைப் பிரச்சினையைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$A_0 X_0 + \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_p} Y_{pj} \lambda_{pj} = b_0 \tag{10·19}$$

$$\sum_{j=1}^{N_p} \lambda_{pj} = 1 \tag{10·20}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, k)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$C_0 X_0 + \sum_{p=1}^{k} \sum_{j=1}^{N_p} d_{pj} \lambda_{pj} \tag{10·21}$$

என்பதன் மீச்சிறு மதிப்பைக் கொடுக்கும் $X_0 > O$, $\lambda_{pj} > 0$ என்பவற்றைக் காண்க.

(10·19) கொடுக்கும் m_0 சமன்பாடுகளை மாற்ற நிரைகள் (transfer rows) என்றும், சமன்பாடுகள் (10·20)-ஐக் குவித்துவ நிரைகள் (convexity rows) என்றும் கூறுகிறோம். A_0-ன் j-வது நிரலுடன் k பூச்சியங்களைச் சேர்த்து அதை

$$\begin{pmatrix} A_{0j} \\ O \end{pmatrix}$$

என்று எழுதினால் கிடைக்கும் நிரல் வெக்டர் ($m_0 + k \times 1$ பரிமாணமுடையது) இயல்-நிரல் (natural column) என வழங்கப்படும். இதேபோன்று Y_{pj}-யுடன் k பரிமாண ஓரலகு அணியின் p-வது நிரலை e_p-ஐச் சேர்த்து எழுதப்படும் நிரல் வெக்டர்

$$\begin{pmatrix} Y_{pj} \\ e_p \end{pmatrix}$$

தலைமை நிரல் (extremal column) எனப்படும்.

(10·19), (10·20), (10·21) அளிக்கும் பிரச்சினை (10·11), (10·12), (10·13) அளிக்கும் மூலப்பிரச்சினையே. ஆனால், இப்பொழுது பிரச்சினை எல்லா k உட்பிரச்சினைகளுடையவும் கோடிப் புள்ளிகள் மூலம் தெரிவிக்கப்படுகிறது. Y_{pj}, d_{qj} என்ற மாற்றங்கள் இக்கோடிப் புள்ளிகளை முறையே ஒருங்கிணைக்கும் சமன்பாடுகளிலும், குறிக்கோள் சார்பிலும் அவை ஏற்படுத்தும் விளைவுகள் மூலமாகத் தெரிவிக்கின்றன. தலைமைப் பிரச்சினையின் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்விற்கான λ_{pj} கொடுக்கப்பட்டால் X_p-க்கள் மூலமாக இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு சமன்பாடு (10·14)-ல் இருந்து கிடைக்கிறது.

இனி கணக்கீடுகளைப்பற்றி ஆராய்வோம். தலைமைப் பிரச்சினைக்கு முதனிலை செய்தக்க தீர்வு ஒன்று இருப்பதாகக்கொள்வோம். ஒரு செயற்கை அடிப்படையிலிருந்து அல்லது உட்பிரச்சினைகளின் அமைப்பிலிருந்து இதைப் பெறக்கூடும். இந்த அடிப்படையின் பரிமாணம் $m_0 + k$ ஆகும். மேலும், இது ஒவ்வொரு உட்பிரச்சினையின் தீர்வுக்கணம் S_p-ன் தலைமை நிரல் ஒன்றையும், இம்மாதிரி கிடைக்கும் k தலைமை நிரல்களைத் தவிரக் கூடுதலாக m_0 தலைமை அல்லது இயல் நிரைகளையோ. அல்லது இரண்டினையுமோ பெற்றிருத்தல் வேண்டும். தன்மாற்று அணி முறையைப் பயன்படுத்துவதாகக் கொண்டு சிம்ப்ளக்ஸ் பெருக்கி வெக்டரை,

$$\Pi = (\pi, \overline{\pi})$$

என்று குறிப்போம். இங்கு, π என்ற m_0 மூலக நிரை வெக்டர் (10·19) தரும் மாற்ற நிரைகளுடனும், $\overline{\pi}$ என்ற k மூலக நிரை வெக்டர் (10·20) தரும் குவித்துவ நிரையுடனும் தொடர்பு கொண்டவையாகும். இவற்றை,

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m0}) = (\pi_i)$$
$$\overline{\pi} = (\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2, \ldots, \overline{\pi}_k) = (\overline{\pi}_p)$$

என்று எழுதுவது வழக்கம். π_i-களை மாற்ற விலைகள் (transfer prices) என்றும் கூறுவதுண்டு.

அடிப்படையில் உள்ள வெக்டர்களுக்கு $d_{pj} = \pi Y_{pj} + \overline{\pi}_p$ என்று கிடைக்கிறது. எனவே, இப்பொழுது $c_j - z_j = 0$ ஆகிறது. வழக்கமான சிம்ப்ளக்ஸ் முறையில் செய்வது போலவே முதனிலை செய்தக்க தீர்வைச் சில புதிய இயல்-நிரல்கள் அல்லது தலைமை-நிரல்களை உட்புகுத்தி மேலும் சிறப்புறச் செய்யலாமா என்று ஆராய்கிறோம். p-வது உட்பிரச்சினையின் தலைமை-நிரல் ஒன்றை எடுத்துக்கொண்டு Π-ஆல் பெருக்கி

$$d_{pj} - \Pi \begin{pmatrix} Y_{pj} \\ e_p \end{pmatrix}$$
$$= d_{pj} - \pi\, Y_{pj} - \overline{\pi}\, e_p$$
$$= C_p X_{pj} - \pi\, A_p X_{pj} - \overline{\pi}_p$$
$$= (C_p - \pi\, A_p)\, X_{pj} - \overline{\pi}_p,\ (p = 1, 2, \ldots, k) \quad (10{\cdot}22)$$

என்று எழுதலாம். இம்மாதிரியே இயல்-நிரல்களுக்கு ஒப்புச் செலவுக் கெழுக்கள் (relative costs) ஒவ்வொரு j-க்கும்,

$$c_{oj} - \pi\, A_{oj} \quad (10{\cdot}23)$$

என்று கிடைக்கும். இங்கு c_{oj} என்பது C_o-ன் j-வது கூறு ஆகும். தலைமைப் பிரச்சினை மீச்சிறுமப் பிரச்சினை என்பதால் (10·22), (10·23)-களில் காணப்பட்ட ஒப்புச் செலவுக் கெழுக்கள் அனைத்து p, j-க்களுக்கும் குறையல்லாதவை என்றால் நடைமுறைத் தீர்வு இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வாகும். அனைத்து A_{oj}-க்களும் நமக்குத் தெரிவதால் (10·23) எளிதில் கணக்கிடப்படலாம். ஆனால், (10·22) -ல் உள்ள ஏதாவது ஒரு ஒப்புச் செலவுக்கெழு குறையெண்தானா எனக் கண்டுபிடிக்கப் பின்வரும் p பிரச்சினைகளுக்கு இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு காணல் வேண்டும்.

அதாவது, ஒவ்வொரு p-க்கும் X_{pj} என்னும் கோடிப் புள்ளிகளைக்கொண்ட கணத்திற்கு,

$$\begin{matrix} \text{மீச்சிறுமம்} \\ B_p X_{pj} = b_p \\ X_{pj} > O \end{matrix} \left[\left(C_p - \pi\, A_p \right) X_{pj} - \overline{\pi}_p \right] < 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, k) \quad (10{\cdot}24)$$

என்பது உண்மையா, அல்லவா என்று அறியவேண்டும். அதாவது p-வது உட்பிரச்சினையின் கட்டுப்பாடுகளை நிறைவு செய்கிற கோடிப்புள்ளிகள் X_{pj}-களுக்கு (10·24)-ல் அடைப்புகளுக்குள் உள்ள கோவையின் மீச்சிறுமம் குறையெண்ணு என்று காண வேண்டும். மீச்சிறுமம் குறையல்லா எண் என்றால் p-வது உட்பிரச்சினையின் எல்லா கோடிப்புள்ளிகளுமே இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வுக்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்.

கட்டுப்பாடு (10·24) $\overline{\pi}_p$-ஐச் சார்ந்து இல்லை என்பதால் இந்தக் கட்டுப்பாடு ஒவ்வொரு p-க்கும்,

$$\left. \begin{matrix} B_p X_p = b_p \\ X_p > O \end{matrix} \right\} \quad (10{\cdot}25)$$

என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கு இணங்க

$$(C_p - \pi\ A_p)\ X_p \tag{10·26}$$

என்னும் சார்பை மீச்சிறுமப் படுத்துவதற்கான நேரிய நெறிப் படுத்தும் பிரச்சினையேயாகும். இந்த நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கான சிம்ப்ளக்ஸ் முறை கோடிபபுள்ளித் தீர்வுகளையே பிறப்பிப்பதால் இந்த உட்பிரச்சினையின் தீர்வு கட்டுப்பாடு (10·24)-ஐயும் நிறைவு செய்யும். மேலும், (10·26)-ல் உள்ள செலவுக் கெழுக்கள் $(C_p - \pi A_p)$ கொடுககப்பட்ட p-வது உட்பிரசசினை யின் செலவுக் கெழுக்களிலிருந்து $\pi\ A_p$ அளவு குறைக்கப் பட்டவை ஆகும். இது தவிர இரண்டு உட்பிரச்சினைகளுக்கும் வேறு வித்தியாசம் இல்லை. இந்தப் புதிய செலவுக் கெழுக்களை சரிக்கட்டிய செலவுக் கெழுக்கள் (adjusted costs) என்று கூறு கிறோம். n_p உட்பெருக்கல்கள் மூலமாக $\pi\ A_p$-ஐ எளிதில் காண லாம். (10·25), (10·26) கொடுக்கும் பிரச்சினையின் இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வு கொடுத்துள்ள p-க்கு X_{pq} என்போம். (S_p வரம்புடை யது என்றால் X_{pq} அதன் ஒரு கோடிப் புள்ளியாகும்) இந்தத் தீர் விற்கான குறிக்கோள் சார்பின் மதிப்பு Z_{pq} என்று குறித்தால்

$$Z_{pq} = (C_p - \pi\ A_p)\ X_{pq} \tag{10·27}$$

$Z_{pq} - \overline{\pi_p} < 0$ என்றால்

$$Y_{pq} = A_p\ X_{pq};\ (d_{pq} = C_p\ X_{pq})$$

என்ற புது தலைமை நிரல் அடிப்படையில் உட்புகத் தகுதி பெறு கிறது. புதிய கோடிப்புள்ளி X_{pq}-ஐ முன்மொழி வெக்டர் (proposal vector) என்றும், Y_{pq}-ஐ அதன் மாற்றல் வெக்டர் (transfer vector) என்றும், d_{pq}-ஐ அதன் மாறறல் செலவு (transfer cost) என்றும் கூறுகிறோம்.

மீச்சிறுமச் செலவுகள் (10·22)-ம், செலவுகள் (10·23)-ம் கொடுக்கப்பட்டால், சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் வழியாக அடுத்து தலைமைப் பிரச்சினையின் அடிப்படையில் உட்புகும் தகுதிபெறும் நிரல் $c_j - z_j$-ஐ மீச்சிறுமப்படுத்துவதாகும். அதாவது,

$$\text{மீச்சிறுமம்}\left[\underset{p}{\text{மீச்சிறுமம்}}\,(Z_{pq}-\overline{\pi}_p),\ \underset{j}{\text{மீச்சிறுமம்}}\,(c_{0j} - \pi A_{0j})\right] \tag{10·28}$$

என்பதுடன் தொடர்பு கொண்டதாகும். இங்கு, p உட்பிரச்சினை களின் அடிக்குறியையும், j அடிப்படையல்லா இயல்-நிரல்களின் அடிக்குறியையும் குறிப்பிடுகின்றன. (10·28) குறையல்லா எண் என்றால் தலைமைப் பிரச்சினையின் நடைமுறை அடிப்படை செய் தக்க தீர்வு மூலப் பிரச்சினையின் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வைத் தரு கிறது. (10·28) குறையெண் என்றால் அதுடன் தொடர்பு

கொண்ட தலைமை நிரல் அல்லது இயல் நிரலை அடிப்படையில் உட்புகுத்துகிறோம். அடிப்படையில் புது வெக்டரை உட்புகுத்தும் போது வழக்கம்போல் மைய நிரையைத் தீர்மானித்து, புதிய Π-ஐக் கணக்கிட்டு இறுதிச் சிறப்புநிலை எய்தும் வரைமேலே கூறிய வாறு திரும்பத் திரும்பச் செயல்படுகிறோம். மூலப் பிரச்சினையின் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு

$$\left[X_0,\ X_p = \sum_j \lambda_{pj} X_{pj}\ (p = 1, 2, \ldots, k) \right]$$

என்பதாகும். இங்கு தலைமைப் பிரச்சினையின் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வில் உள்ள p-வது உட்பிரச்சினையின் கோடிப் புள்ளிகளின் அடிக்குறியை j-குறிக்கிறது.

கணங்கள் S_p வரம்புடையனவாக இல்லாத நிலையிலும் சிறு வேறுபாடுகளுடன் மேற்கூறிய முறையைப் பின்பற்றி தீர்வு காண லாம். (விவரங்களுக்கு § 0·4-ல் குறிப்பிடப்பட்ட காஸ் அவர்களின் நூலைப் பார்க்கவும்).

10·5 புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல்: (Stochastic Programming)

நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையின் மாறிகள் பொதுவாக நியதிக் குட்பட்டவையாகும். (control variables, policy variables or decision variables). ஆய்வாளர் தன்னிச்சைப்படி உலகவியலில் அவை நிறைவு செய்யும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு ஏற்றவாறு குறிப்பிட்ட ஏதாவது ஒரு குறிக்கோள் சார்புக்கு சிறப்பு இறுதித் தீர்வு கொடுக்கும் வகையில் இவற்றின் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்க வேண்டிய நிலையில் இருக்கிறார். ஆனால் இம்மதிப்புகள் பிரச்சினையில் உள்ள பல்வேறு துணையலகுகளைச் சார்ந்து இருக்கலாம். (எடுத்துக்காட்டாக, கச்சாப் பொருள்களின் கிடைக்கும் வாய்ப்புகள், செலவுக் கெழுக்கள், தொழில் நுணுக்கத்தைப்பற்றிய விவரக் குறிப்புகள், முதலிய இவ்வகை துணையலகுகள் ஆகும்). இத்துணையலகுகளின் மதிப்புகள் தனியாகவோ அல்லது சேர்ந்தோ மாறும்போது நியதிக் குட்பட்ட மாறிகளின் மதிப்புகள் மாறுதல் அடைகின்றன. சிம்ப்ளக்ஸ் முறையின் அடிப்படையில் வரையறுக்கப்பட்ட திட்ட அமைப்புக் கணக்கீடுகள் துணையலகுகளின் ஏதாவது குறித்த மதிப்புகளுக்கே இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வைக் கொடுக்கின்றன. பெரும் பாலும் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகளில் இத்துணையலகுகள் நியதிக்குட்படாத (random) மாறிகளாக இருப்பதால் இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு காணத் திட்ட முறைகள் (standard methods) பயனளிப்பதில்லை. இத்தகு நிலைகளில் பிரச்சினையின் தீர்வு காண புள்ளியியல் முறைகளைக் கையாள வேண்டியுள்ளது. இதைப்

புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல் என்கிறோம். இங்கு சுருக்கமாக இம் முறைகளைப்பற்றிக் கூறப்படுகிறது. மேலும் விவரங்கள் G. Hadley -ன் Non-linear and Dynamic Programming (Addison-Wesley, Publishing Co.) நூலின் 5-ம் பாடத்தில் காணலாம். தற்காலத்தில் மிகவும் வேகமாக முன்னேறி வருகின்ற துறையாதலின் கணித சஞ்சிகைகளில் இவற்றைப்பற்றிய அண்மைகால ஆய்வுக்கட்டுரைகளைப் பரக்கக் காணலாம்.

ஒரே கணித மாதிரியில் சமனின்மைக் கட்டுப்பாடுகளையும், நியதிக்குட்படாத குறைகளையும் (random errors) ஒருங்கே ஆராயத் தகுந்தவாறு முறைகளைக் காண்பது எளிதன்று. கட்டுப்பாடுகளுக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கவேண்டுமா அல்லது நியதிக்குட்படாத மாறிகளுக்கு முதலிடம் கொடுக்க வேண்டுமா என்பதைத் தொடக்கத்திலேயே தீர்மானித்துக்கொள்ள வேண்டும். கட்டுப்பாடுகள் தான் முக்கியமானவை என்றால் நியதிக்குட்படாத மூலகங்களின் சாரசரி மதிப்புகளை அவற்றிற்கு ஈடு செய்து கணித நெறிப்படுத்தும் மாதிரியை அமைக்கின்றோம். மாறாக, நியதிக்குட்படாத மூலகங்களே முதலீடம் பெறத்தக்கவை என்றால் கட்டுப்பாடுகளை ஒதுக்கி விட்டுப் பிரச்சினையை ஆராய்கிறோம். இது இயலாது என்றால் பிரச்சினையையே கைவிடவேண்டிய நிலையும் நேரலாம்!

பொதுவாக, கணித மாதிரியில் நியதிக்குட்படாத மாறிகளின் விளைவுகளை ஓரளவுத் தோராயமாக எடுத்துக் கொண்டு கட்டுப்பாடுகளையும் தள்ளாமல் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை அமைக்க முடிந்தால், அது பயனுடையதாக இருக்கும். இதன் காரணமாகக் கணக்கீடுகளின் சுமை கூடலாம். இருப்பினும் நேரியவல்லாத நெறிப்படுத்துதலுக்கான வழி முறைகளைப் பயன்படுத்தி இச்சுமையைக் குறைக்கக்கூடும்.

புள்ளியியல் நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைகள் பெரும்பாலும் குவிப்பிரச்சினைகளாகவே உள்ளன. எனவே, நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினைக்கு ஓரிடத்து இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வு காணும் முறைகள் அப்பிரச்சினையின் அனைத்திடத்து இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வையும் கொடுக்கின்றன.

இந்தப்பகுதியில் மூன்று விதமான புள்ளியியல் முறைகள் விளக்கப்படுகின்றன–(i) தொடர் முறைக்கப்பாற்பட்ட (non-sequential) புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல்; (ii) தொடர் முறைப் (sequential) புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல்; (iii) தற்செயல் கட்டுப்பாட்டு நெறிப்படுத்துதல் (chance constrained programming).

பிரச்சினையை எளிமையாக்க விரும்பினுல் பின்வரும் தற்கோள் களை எடுத்துக்கொள்வது நலம். ஒரு சில நியதிக்குட்படாத கெழுக்களைத் தவிர மற்றெல்லா விதத்திலும் கொடுக்கப்பட்ட பிரச்சினை நேரியது என்று கொள்ளலாம். பிரச்சினையின் எல்லா கெழுக்களும் அறுதியிட்டுக் காணக் கூடியவையாக நாம் அறியா விட்டாலும், அவற்றிற்கான நிகழ் தகவு பரவல்களையும் (probability distributions), ஒட்டுறவு கெழுக்களையும் (Correlation coefficients), இணைப்பரவல்களையும் (joint distributions) நாம் அறி வோம் என்று கொள்ளலாம். இப்பரவல்களின் துணையலகுகள் எந்த அளவிற்குத் துல்லியமாக (accurately) காணப்படுகின்றனவோ அந்த அளவிறகுச் சரியாக இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வும் பெறப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, நியதிக்கு உட்படாத சில மாறிகளின் பரவல் கள் இயல்நிலைப் பரவலைச் (normal distribution) சார்ந்தது என்று கொள்வதைவிட குறித்த சமன்பாட்டுபடி பெற்ற t-பரவலைச் (t-distribution with specified number of degrees of freedom) சார்ந்தது என்று எடுத்துக்கொண்டால் பரவலின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி (variance) சரிவரத் தெரியாத போதும் இறுதிச் சிறப்புத்தீர்வைக் காணமுடியும்.

நியதிக்குட்படாத கெழுக்களின் உண்மை மதிப்புகள் வெளிப் படுவதற்கு முன்னரே முதனிலை மாறிகள் (first stage variables) எனப்படும் சில மாறிகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். முதனிலை மாறிகள் அல்லாத மற்ற மாறிகள் இரண்டாம் நிலை மாறிகள் எனப்படும்.

(i) தொடர் முறைக்கப்பாற்பட்ட புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல்:

நியதிக்குட்படாத கெழுக்கள் யாவும் குறிக்கோள் சார்பில் மட்டிலுமே இருந்தால் பிரச்சினை ஓரளவு எளிமைப்படுத்தப் படலாம். அனைத்து மாறிகளும் முதனிலை மாறிகள் என்ருல் குறிக்கோள் சார்பின் சராசரி மதிப்பு நியதிக்குட்படாத கெழுக்களை அவற்றின் சராசரி மதிப்புகளுக்கு ஈடு செய்வதால் மீபபெருமமா கிறது. அல்லது குறிக்கோள் சார்பின் விலக்க வர்க்க சராசரி கொடுக்கப்பட்ட கூட்டிடைக்கு (Arithmetic Mean) மீச்சிறுமப் படுத்தப்படலாம். இவ்வாறு செயல்படும்போது பிரச்சினையின் தீர்வு இருபடி நெறிப்படுத்துதல் முறையைப் பயன்படுத்திப் பெறப் படுகிறது.

இரண்டாம் நிலை மாறிகளும் இருந்தால் ஏதாவது ஒரு தீர்வு இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வாக இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு காண வேண்டி நேரிடலாம். இதைக் கணக்கிட குறைக்கப்பட்ட செலவுக்

கெழுக்கள் யாவும் குறையல்லா எண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ் தகவு காணப்படவேண்டும். அதாவது, நியதிக்குட்படாத கெழுக் களை வெக்டராகப் பாவித்து, அவை ஒரு குவிப்பன்முகிக்குள் இருப் பதற்கான நிகழ் தகவு காணப்படவேண்டும். ஆனால் இக்கணக் கீடுகள் சிக்கலானவை; எனவே, தேவையானால், பிரச்சினையின் அமைப்பை மாற்றி, இவற்றைத் தவிர்க்க இயன்ற வரையில் முயற் சிக்க வேண்டும். தவிர்க்க முடியாத நிலையில் மட்டுமே இரண்டாம் நிலை மாறிகளுக்கானக் கணக்கீடுகளில் ஈடுபடுகிறோம்.

சில நியதிக்குட்படாத கெழுக்களைக் கட்டுப்பாடுகள் பெற்றிருந் தால், முதனிலை மாறிகளைக் குறிக்கோள் சார்பின் எதிர் நோக்கப் படும் மதிப்பு (expected value) மீப்பெருமமாகுமாறு தேர்ந்தெடுக்க முயல வேண்டும். நியதிக்குட்படாத மூலகங்களின் இணைப்பரவல் கள் தனித்தவையாக (discrete) இருந்தால் முதனிலை மாறிகளையும், எல்லாச் சந்தர்ப்பங்களுக்கும் பொருத்தமான இரண்டாம் நிலை மாறிகளின் கணங்களையும் தேர்ந்தெடுப்பது பெரும் நேரிய நெறிப் படுத்தும் பிரச்சினையாக மாறுகிறது. முதனிலை மாறிகள் இணைப்பு மாறிகள் என்பதைத்தவிர இப்பெரும் பிரச்சினை பல உட்பிரச்சினை களின் சேர்க்கையே. நியதிக்குட்படாத மாறிகளின் மதிப்புகளுக் கான அனைத்துச் சேர்க்கைகளின் எண்ணிக்கை உட்பிரச்சினை களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும் என்பதால் உட்பிரச்சினை களின் எண்ணிக்கையும் பெரிதாகவிருக்கும் வாய்ப்பு உள்ளது. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட குழுக்களில் இரண்டாம் நிலை மாறிகள் வராதவாறு கட்டுப்பாடுகளை வெவ்வேறு குழுக்களாகப் பிரிக்க முடியும் என்றால் பிரச்சினை ஓரளவு எளிதாகலாம். ஒவ்வொரு குழுவிலும் ஒரு கட்டுப்பாடு மட்டுமே இருந்தால் இன்னமும் எளிதாக லாம். இப்பொழுது வெவ்வேறு குழுக்களில் உள்ள நியதிக்குட் படாத மாறிகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் (coefficients of correlation) தேவைப்படுவதில்லை.

(ii) தொடர் முறைப் புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல்:

பல பொருள்களைப் பல்வேறு காலப்பிரிவுகளில் உற்பத்தி செய் வதற்கான திட்டமொன்றைத் தயாரிப்பதாகக் கொண்டால் மற்ற மாறிகளுடன் t-வது காலப்பிரிவில் i-வது பொருளின் தேவையும் கொடுக்கப்பட்டால் ஒரு நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினையை அமைக்கலாம். ஆனால் நடைமுறையில் ஒரு பொருளின் தேவை குறித்த காலப்பிரிவில் இவ்வளவுதான் என்று அறுதியிட்டுக் கூற முடியாது. ஒரு சில நியதிக்குட்பட்டு அத்தேவைகளில் மாற்றம் ஏற் படுவதற்கு வாய்ப்புகள் உள்ளன. இந்நிலைகளில் அவற்றின் உண்மை

மதிப்புகளை அறியாமலேயே அவற்றிற்கான நிகழ் தகவுப் பரவல்களிலிருந்து பெறும் மதிப்பீடுகளைக் (estimates) கொண்டு பிரச்சினையைச் சமாளிக்க வேண்டி இருக்கலாம். இந்த விதமாகப் பிரச்சினைகளை அணுகும்போது எதிர்பாராத கூடுதல் தேவையைச் சமாளிக்க ஏதாவது காலப்பிரிவில் கூடுதலான சரக்கைத் தேக்கி வைக்கவோ அல்லது எதிர்பார்த்ததைவிடக் குறைந்த தேவை ஏற்பட்டதன் காரணமாகத் தேவைக்கு மேற்பட்ட சரக்கை அனுவசியமாகத் தேக்கி வைத்திருக்க வேண்டியோ நேரலாம். வெவ்வேறு பொருள்களுக்கான உற்பத்திக் கட்டுப்பாடுகள் தம்முள் தொடர்பற்று இருக்குமானால் இயக்கவியல் நெறிப்படுத்துதலைப் (Dynamic Programming) பயன்படுத்திப் பிரச்சினையின் தீர்வு காணலாம். ஆனால் இக்கட்டுப்பாடுகள் பெரும்பாலும் தம்முள் தொடர்பு கொண்டவையாகவே இருக்கும். தகுந்தவாறு நிச்சயமற்ற தன்மைகளுக்கும் ஈடு கொடுக்கின்ற வகையில் உற்பத்தித் திட்டத்தை மாற்றி அமைத்து தோராயமாகப் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு காண புள்ளியியல் முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். கணித மாதிரிக்கும், புள்ளியியல் மாதிரிக்கும் சமன்பாடுகளின் எண்ணிக்கையில் மாறுதல் இருக்காது. ஆனால் புள்ளியியல் மாதிரியில் கூடுதலான மாறிகள் இருக்கும்.

கூட்டிடைச் சராசரி பூச்சியமாகவுள்ள நியதிக்குட்படாத மாறியின் அளவிற்கு ஒரு காலப்பிரிவில் குறிப்பிட்ட ஒரு பொருளின் விற்பனை அளவு அதன் சராசரி அளவிலிருந்து வேறுபட்டிருந்தால் தீர்வு காண்பது கடினமாகிவிடும். இருப்பினும் ஒரு முக்கிய பண்பு ஈண்டு கவனிக்கத்தக்கது. விற்பனைக்குள்ள அளவோடு நியதிக்குட்படாத ஓர் அளவைக் கூட்டுவதன் விளைவும் அதேயளவு தேவையிலிருந்து கழிப்பதால் ஏற்படும் விளைவும் விற்பனையாகாத இருப்புச் சரக்கைப் பொறுத்து சமமானவையே. அதாவது, பரவலின் கூட்டிடைச் சராசரி பூச்சியமாக இருக்கும் வரை மேலே குறிப்பிடப்பட்ட இரு நிலைகளிலும் வீணடைந்த அல்லது காலந்தாழ்த்தி விற்கப்பட்ட சரக்கினால் ஏற்படும் நஷ்டம் ஒரே மாதிரி இருக்கும். அதாவது, நியதிக்கு உட்படாத தேவையால் (demand) நியதிக்குட்படாத தேவைப் பூர்த்தியை (supply) மாற்றியமைக்கும்போது விற்பனையால் கிடைக்கும் சராசரி வருமானம் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

இந்தப் பண்பின் காரணமாகப் பிரச்சினையை நன்கு உணர முடிகிறது. தேவையின் பரவலைச் சரியாகக் கண்டறியும் வாய்ப்பில்லை. எனவே, தேவைப் பூர்த்தியின் மாறுபாட்டிற்கும் சரியான மதிப்பீடு கண்டறியத் தேவை இல்லை. ஆனால் தோராயமான

மதிப்பீடாவது எங்ஙனம் காண்பது என்பதை அறியவேண்டும்; நடைமுறை உற்பத்தி மட்டமும், உபரி உற்பத்திக்கான, அதனுடன் தொடர்புகொண்ட எல்லைச் செலவுகளும் (marginal costs) எவ்வாறு ஒவ்வொரு காலப் பிரிவின் தொடக்கத்திலும் உள்ள சரக்கு இருப்பு மட்டத்தின் மாறுதல்களைச் சார்ந்துள்ளன என்பதைக் கண்டறிதல் வேண்டும். சில சிறப்பானக் கட்டுப் பாடுகளுடன் இவற்றைக் காணமுடியும்.

(iii) தற்செயல் கட்டுப்பாட்டு நெறிப்படுத்துதல் (Chance-constrained programming)

இது புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதலின் பொது உருவாகும். பிரச்சினைக்கான சமனின்மைக் கட்டுப்பாடுகள் எப்பொழுதும் உண்மையாக இருக்கத் தேவையில்லை என்றும் i-வது கட்டுப்பாடு α_i நிகழ்தகவு பெற்று மீறப்படுகிறது எனவும் கொண்டு பிரச்சினை யின் தீர்வு காண முயற்சிக்கிறோம். புள்ளியியல் பகுப்பாய்வில் (Statistical Analysis) முக்கியத்துவ சோதனைகளைப் (Tests of significance) போன்றது இம் முறை. இதைப் பயன்படுத்தித் திட்ட உணவுப் (diet) பிரச்சினைகள் சில ஆராயப்பட்டுள்ளன.

நடைமுறையில் புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல் முறைகளைச் செயல்படுத்தும்போது பலவிதச் சிக்கல்களை எதிர் கொள்ள நேரிடுகிறது. இவையாவும் மேலே கண்ட மாதிரிகளின் அமைப் பிற்குள் பொருந்த வேண்டும் என்பதில்லை. மாதிரியில் உள்ள தற்கோள்கள் சரியான அடிப்படையில் அமையாததே இதற்கு முக்கிய காரணமாகும். குறிப்பாக, நியதிக்குட்படாத மூலகங் களுக்கும், எடுக்கப்படவேண்டிய முடிவுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பு அறுதியிட்டு வரையறுக்கப்பட முடியாமலிருப்பது ஒரு காரண மாகலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, பல பொருள்களை வெவ்வேறு விலைகளில் வெவ்வேறு சந்தைகளில் (markets) விற்க வேண்டும் என்க. சந்தைகளின் தேவை நிலவரம் நிச்சயமாகத் தெரியாதபோது இப் பொருள்களுக்கான உற்பத்தித் திட்டம் அமைக்க வேண்டும் என்றால், தேவைக்கான மதிப்பீடுகளைச் செய்து புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதலைப் பயன்படுத்துகிறோம். இத்தகு நிச்சயமற்ற சந்தைக்கான மாதிரிகளைப்பற்றி விவரங்கள் §10.1–ல் குறிப்பிட்ட Beale என்பவரின் நூலில் காணலாம்.

விடைகள்

பயிற்சி 1 : (பக்கம் 62)

(1) $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; முடியாது; ஒவ்வா அணிகள்.

(2) $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6\cdot1 & -2\cdot3 & 0\cdot1 & -0\cdot1 \\ 8\cdot6 & -2\cdot8 & -0\cdot4 & -0\cdot6 \\ -4\cdot4 & 1\cdot2 & 0\cdot6 & 0\cdot4 \\ -7\cdot1 & 3\cdot3 & -1\cdot1 & 0\cdot1 \end{pmatrix}$

(6) $-\frac{27}{26}$; (7) $X+Y=(11, 4)$; $X-Y=(-3, -2)$

(8) $3X+4Y=(40, 50)$; $7X-3Y=(7, 18)$
உட்பெருக்கல் $= 280 + 900 = 1180$.

(9) (i) இல்லை; (ii) ஆம்; (iii) ஆம்; (iv) ஆம்.

(11) அ, இ, உ குவிகணங்கள்.

(15) $x_1 = 5$; $x_2 = 6$; $x_3 = 7$.

(17) (i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

(19) லாக்ராஞ்சிச் சார்பு F-ஐ.

$$F = a_1 e^{-b_1 x_1} + a_2 e^{-b_2 x_2} + \pi (x_1 + x_2 - 1)$$ என்று எடுத்துக்கொள்க.

பயிற்சி 2 : (பக்கம் 82)

(1) (4, 0, 0, 0, 3, 10); $(0, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{32}{3}, \frac{14}{3})$

(2) (0, 0, 4·9, 0·9, 0); $(\frac{43}{4}, 0, 0, \frac{1}{12}, 0)$

(3) $(0, \frac{316}{86}, \frac{125}{86}, \frac{447}{86})$

பயிற்சி 3 : (பக்கம் 139)

(1) $C = \frac{57}{7}$ $(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1, 0, 0)$

(2) நகைச்சுவை நடிகர் 12 நி., மெல்லிசை நிகழ்ச்சி 12 நி. விளம்பர அறிவிப்புகள் 6 நி., செலவு ரூ. 3,300.

(3) 60 நோட்டுகள்; 30 புத்தகங்கள்; ரூ. 3.90.

(4) 25, 60, 20, 45 நிமிடங்கள்; ரூ. 53.

(5) 0, 75, 15, ; 390 மதிப்பெண்கள்.

(6) அனுமான் 140; ஆஞ்சனேயன் 150; ரூ. 3,30,000.

(7) A, B, C முறையே 0, 6, 3; இலாபம் ரூ. 42.

(9) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 14$; $y = 66$.

(10) $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $f = 1$.,

(11) A, B முறையே 2, 6 நாட்கள்; ரூ. 1,80,000.

பயிற்சி 4 : (பக்கம் 166)

(1) கேடுறுத் தீர்வு கிடைக்கின்றது; மீப்பெரு மதிப்பு 6; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$.

(2) $x_1 = \frac{89}{41}$; $x_2 = \frac{50}{41}$; $x_3 = \frac{62}{41}$; மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{165}{41}$.

(3) $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; மீப்பெரு மதிப்பு $= 6$.

(5) மீச்சிறு மதிப்பு $= 2$.

பயிற்சி 5 : (பக்கம் 208)

(1) (i)
$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 2 & 2 & \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 2 & 5 & \end{array}$$

(2) (1)
$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 5 & 15 \end{array}$$

மீச்சிறுமம் 186

(ii)
$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 75 & 0 & 25 & 100 \\ 25 & 0 & 75 & 0 & 100 \\ 50 & 0 & 0 & 50 & 100 \\ \hline 75 & 75 & 75 & 75 & 300 \end{array}$$

மீச்சிறுமம் 5000

(iii)
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \\ 5 & 0 & 7 & 1 & 13 \\ \hline 6 & 7 & 7 & 10 & 30 \end{array}$$

(3) மீப்பெரு நிறை 4250 குவிண்டால்கள்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வுகள் காணலாம். ஒரு தீர்வு :

	T_1	T_2	T_3
B_1	100		50
B_2			150
B_3		150	
B_4	100	50	

(4)

	பங்களூர்	ஹைதராபாத்	நாகபுரி	ஆக்ரா	புவனேஸ்வரம்	மொத்தம்
சென்னை	1	2				3
பம்பாய்		0·5	3·5			4
கல்கத்தா		0·5		2·5	2	5
மொத்தம்	1	3	3·5	2·5	2	

செலவு : ரூ. 13,350

(5)

	D_1	D_2	D_3	போலி	மொத்தம்
S_1		100	400	300	800
S_2	300	200			500
மொத்தம்	300	300	400	300	1300

செலவு : ரூ. 10,500

(6)

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2	5			7
S_2			5		5
S_3	1			5	6
போலி			3	2	5
	3	5	8	7	23

செலவு : ரூ. 6[illegible]

பயிற்சி 7 : (பக்கம் **264**)

(2) $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{5}{3}$; $x_4 = 0$; மீப்பெருமம் **15.**

(3) $x_1 = \frac{5}{7}$; $x_2 = \frac{3}{7}$; மீச்சிறுமம் $= -\frac{1}{7}$.

பயிற்சி 9 : (பக்கம் **297**)

(3) $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{14}{9}$; $x_3 = 0$; $x_4 = \frac{10}{9}$; மீச்சிறுமம் $= -\frac{32}{9}$.

(4) $x_1 = 4$; $x_2 = 6$; $x_3 = x_4 = 0$; மீச்சிறுமம் $= -288$.

(6) $x_1 = \frac{7}{4}$; $x_2 = \frac{1}{4}$; மீச்சிறுமம் $-\frac{33}{8}$.

கலைச்சொற்கள்

(Bibliography)

(தமிழ் - ஆங்கிலம்)

அ

அகப்புள்ளி	—	Interior point
அட்டவணை	—	Tableau
அடிப்படை	—	Basis
அடிப்படை செய்தக்க தீர்வு	—	Basic feasible solution
அடிப்படைத் தீர்வு	—	Basic solution
அடிப்படை மாறி	—	Basic variable
அடிப்படையல்லா மாறி	—	Non-basic variable
அடிப்படையல்லா வெக்டர்	—	Non–basic vector
அடிப்படை வெக்டர்	—	Basic vector
அணி	—	Matrix
அணிக்கோவை	—	Determinant
அணி பிறப்பிப் புரோகிராம்	—	Matrix generator program
அணி மீச்சிறும முறை	—	Method of matrix minima
அணியின் தரம்	—	Rank of a matrix
அணியின் வரிசை	—	Order of a matrix
அதிபர தளம்	—	Hyper plane
அதிபர வெளி	—	Hyper space
அரங்கம்	—	Domain
அரை தளம் (வெளி)	—	Half– plane (space)
அலகு	—	Unit
அலகுகள் நிர்ணயித்தல்	—	Scaling
அறிக்கை	—	Report
அறிக்கை எழுதும் புரோகிராம்	—	Report writer program
அறிமுறை	—	Theory (theoretical)
அனைத்திடத்து இறுதிச்சிறப்புத் தீர்வு	—	Global optimum solution
அனைத்திடத்து மீச்சிறுமம்	—	Global minimum
அனைத்திடத்து மீப்பெருமம்	—	Global maximum

இ

இடைச் செருகல்	—	Interpolation
இடைவெட்டு (கணங்களின்)	—	Intersection (of sets)
இணைக் காரணி	—	Cofactor
இணைப் பரவல்	—	Joint distribution
இயக்கவியல் நெறிப்படுத்துதல்	—	Dynamic programming
இயற் பரவல்	—	Normal distribution
இருபடி அமைப்பு	—	Quadratic form
இருபடி நெறிப்படுத்துதல்	—	Quadratic programming
இருமை சிம்ப்ளக்ஸ் முறை	—	Dual simplex method
இருமைத் தேற்றம்	—	Duality theorem
இருமைப் பண்பு	—	Duality
இருமைப் பிரச்சினை	—	Dual problem
இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு	—	Optimum solution
இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வின் பின்னாய்வு	—	Post-optimal analysis

உ

உட்கணம்	—	Subset
உட் பிரச்சினை	—	Sub-problem
உட்புகும் தகவல்கள்	—	In put
உட் பெருக்கல்	—	Inner product
உருமாற்றம்	—	Transformation
உலைவு முறை	—	Perturbation technique
உற்பத்தி	—	Production
உறை	—	Hull

எ

எடுகோள்	—	Assumption
எதிர்ச் சீரணி	—	Skew-symmetric matrix

ஒ

ஒட்டுறவு	—	Correlation
ஒத்த அணிகள்	—	Conformable matrices
ஒதுக்கீட்டுப் பிரச்சினை	—	Scheduling problem
ஒதுக்கீடு	—	Allocation
ஒப்புக்கொள்ளக்கூடிய அடிப்படை	—	Admissible basis
ஒருமையணி	—	Singular matrix
ஒருமையற்ற அணி	—	Non-singular matrix

ஒவ்வாச் சமன்பாடுகள் — Inconsistent equations
ஒவ்வாத் தன்மை — Inconsistency

ஓ

ஓரலகு அணி — Unit matrix
ஓரலகு அபராத முறை — Unit penalty method
ஓரலகு வெக்டர் — Unit vector
ஓரிடத்து இறுதிச் சிறப்புத் தீர்வு — Local optimum solution
ஓரிடத்து மீச்சிறுமம் — Local minimum
ஓரிடத்து மீப்பெருமம் — Local maximum

க

கட்டுப்பாடு — Constraint
கணக்கீடு — Algorithm
கணித மாதிரி — Mathematical model
கணிதவியல் நெறிப்படுத்துதல் — Mathematical programming
கம்ப்யூட்டர் புரோகிராம் — Computer program
கலப்பு முழு வெண் நெறிப் படுத்துதல் — Mixed integer programming
காகித நாடா — Paper tape
காந்த நாடா — Magnetic tape
கிடங்கு — Godown
கிடைக்கும் வாய்ப்புக்கள் — Availabilities
கிளை—வரம்பு முறைகள் — Branch and bound methods
குவி கூம்பு — Convex cone
குவி சார்பு — Convex function
குவி சேர்க்கை — Convex combination
குவித்துவ நிரை — Convexity row
குவி நெறிப்படுத்துதல் — Convex programming
குவிப் பலகோணம் — Convex polygon
குவிப்பன் முகி — Convex polyhedron
குவியுறை — Convex hull
குழிவுச் சார்பு — Concave function
குறிக்கோள் சார்பு — Objective function
குறை, குறையான — Negative
குறைஅரையுறுதியான இருபடி அமைப்பு — Negative semi-definite quadratic form
குறை உறுதியான இருபடி அமைப்பு — Negative definite quadratic form

குறைக்கப்பட்ட செலவு	—	Reduced cost
குறையல்லா மதிப்பு	—	Non-negative value
கூட்டுச் சராசரி	—	Arithmetic mean
கூடுதல் நேர உற்பத்தி	—	Overtime production
கூம்பு	—	Cone
கூறுக்கச் சிதைவு	—	Decomposition
கூறு	—	Component
கெழு (குணகம்)	—	Coefficient
கேடுரு, கேடுருத	—	Non-degenerate
கேடுரு அடிப்படை	—	Non-degenerate basis
கேடுறு அடிப்படை	—	Degenerate basis
கேடுறுத் தன்மை	—	Degeneracy
கேடுறுத் தீர்வு	—	Degenerate solution
கொள்ளிடம்	—	Capacity
கோடிப் புள்ளித் தீர்வு	—	Extreme point solution

ச

சதுர அணி	—	Square matrix
சமச்சீர் அணி	—	Symmetric matrix
சமச்சீர் பெற்ற முதன்மை-இருமைப் பிரச்சினை	—	Symmetric primal-dual problem
சமச்சீரற்ற முதன்மை-இருமைப் பிரச்சினை	—	Unsymmetric primal - dual problem
சமபடித்தான	—	Homogeneous
சமன்பாட்டுக் கட்டுப்பாடு	—	Equality constraint
சமன்பாடு	—	Equation
சமனின்மை	—	Inequality
சராசரி	—	Average
சரிக் கட்டிய செலவு	—	Adjusted cost
சரிவு வெக்டர்	—	Gradient vector
சார்ந்த மாறி	—	Dependent variable
சார்பு	—	Function
சார்பலன்	—	Functional
சாரா மாறி	—	Independent variable
சிக்கல், சிக்கலான	—	Complex
சிக்கல் மாறி	—	Complex variable
சிக்கலெண்	—	Complex number
சிக்கல் நீக்கி நாடா	—	Unravel tape
சிம்ப்ளக்ஸ்	—	Simplex
சிம்ப்ளக்ஸ் அட்டவணை	—	Simplex tableau

சிம்ப்ளக்ஸ் முகம் — Simplicial face
சிம்ப்ளக்ஸ் முறை — Simplex method
சிற்றணி கோவை — Minor of a determinant
சுயேச்சை மாறி — Free variable
சுருக்கிய அட்டவணை — Contracted tableau
சுழற்சி — Cycling
செங்குத்து வெக்டர்கள் — Orthogonal vectors
செய்தக்க தீர்வு — Feasible soultion
செய்தக்க பிரதேசம் — Feasible region
செய்தகா தன்மை — Infeasibility
செய்தகு தன்மை — Feasibility
செய்முறை — Practice
செயல்முறை ஆய்வு — Operations research
செயல்முறைகள் — Activities
செயல்முறை மட்டம் — Level of activity
செயற்கை அடிப்படை — Artificial basis
செயற்கை மாறி — Artificial variable
செயலி — Operator
செலவு — Cost
செலவுக் கெழு — Cost coefficient
செலவுச் சார்பு — Cost function
சேணப் புள்ளி — Saddle point
சேணப் புள்ளிப் பிரச்சினை — Saddle point problem
சேர்ப்பு அணி — Adjoint matrix
சேர்ப்புக் கணம் — Union (of sets)

த

தம்முள் ஒருபடிச் சார்ந்த வெக்டர்கள் — Linearly dependent vectors
தம்முள் ஒருபடிச் சாரா வெக்டர்கள் — Linearly independent vector
தலைமைப் பிரச்சினை — Extremal (master) problem
தற்கோள் — Hypothesis
தற்செயல் கட்டுப்பாட்டு நெறிப்படுத்துதல் — Chance constrained programming
தன்மாற்றின் பெருக்கல் அமைப்பு — Product form of the inverse
தன்மாற்று அணி — Inverse matrix
தனித்தப் பரவல் — Discrete distribution
தனிமாறி — Special variable

திசையிலி — Scalar
திட்ட உணவுப் பிரச்சினே — Diet problem
திருத்தப்பட்ட சிம்ப்ளக்ஸ் முறை — Revised simplex method
திரும்பத் திருப்புதல் — Iteration
திருப்பு அணி — Transpose of a matrix
திறந்த பல கோணம் — Open polygon
தீர்வு — Solution
துணே அலகு — Parameter
துணேயலகு நெறிப்படுத்துதல் — Parametric programming
தூய முழுவெண் நெறிப்படுத்துதல் — Pure integer programming
தேவை — Demand
தேற்றம் — Theorem
தொகுப்பு அட்டைகள் — Compile cards
தொடர்பு நிரை — Reference row
தொடர் முறைக்கப்பாற்பட்ட புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல் — Non-sequential stochastic programming
தொடர் முறைப் புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல் — Sequential stochastic programming
தொடர்பு விடுபடாத — Connected
தொய்வு நிரப்புத் தேற்றம் — Complementary slackness theorem
தொய்வு மாறி — Slack variable
தொழில் நுணுக்கம் — Technology
தோராயம் — Approximation

ந

நடைமுறைத் தீர்வு — Current solution
நார்ம் (நீளம்–வெக்டரின்) — Norm (length of a vector)
நிகழ்தகவு — Probability
நிகழ்தகவுப் பரவல் — Probability distribution
நியதிக்குட்பட்ட மாறி — Policy(control, decision) variable
நியதிக்குட்படாத — Random,
நியதிக்குட்படாத மாறி — Random variable
நிரல் — Column
நிரல் அணி — Column matrix
நிரல் வெக்டர் — Column vector
நிருவாகம் — Organization
நிரை — Row

நிரை அணி	—	Row matrix
நிரை வெக்டர்	—	Row vector
நிலையான கட்டணம்	—	Fixed charge
நிலையான செலவு	—	Fixed cost
நிலை வெக்டர்	—	Position vector
நெறிப்படுத்துதல்	—	Programming
நேரிய (ஒருபடிச்) சமன்பாடு	—	Linear equation
நேரிய சமனின்மை	—	Linear inequality
நேரிய சார்பலன்	—	Linear functional
நேரிய தொடர்பு	—	Linear relation
நேரிய நெறிப்படுத்தும் பிரச்சினை	—	Linear programming problem
நேரியவல்லாத	—	Non-linear
நேரியவல்லாத் தன்மை	—	Non-linearity
நேரியவல்லாதநெறிப்படுத்துதல்	—	Nonlinear programming

ப

பகுதி I-க்கான கணக்கீடு	—	Phase I calculation
பகுதி II-க்கான கணக்கீடு	—	Phase II calculation
படிக்கட்டுச் சார்பு	—	Step function
படிக்கட்டு முறை	—	Stepping stone method
பரிமாணம்	—	Dimension
பலகாலப் பிரிவு மாதிரி	—	Multi-time period model
பிரதேசம்	—	Region
பிரித்து நெறிப்படுத்துதல்	—	Separable programming
பின்நோக்கு மாற்றம்	—	Backward transformation
புரோகிராம்	—	Program
புரோகிராம் சங்கேத மொழி	—	Program code
புள்ளியியல் நெறிப்படுத்துதல்	—	Stochastic programming
பூச்சிய அணி [வெக்டர்]	—	Zero (null) matrix [vector]
பூச்சியம்-ஒன்று(0-1) மாறி	—	(0–1) Variable
பெருக்கல் உறுப்புகள்	—	Product terms
பெருக்கி	—	Multiplier
பொதுமை	—	Generality
பொதுமைக்கு ஊறு இல்லாமல்	—	Without loss of generality
பொருளாதாரம்	—	Economics
போக்குவரத்துச் செலவு	—	Transportation cost
போக்குவரத்துப் பிரச்சினை	—	Transport problem
போலி கிடைக்குமிடம்	—	Dummy source
போலி சேரிடம்	—	Dummy destination

ம

மட்டம்	— Level
மட்டு மதிப்பு	— Modulus, absolute value
மதிப்பீட்டு வெக்டர்	— Pricing vector
மறைவுச் செலவுக் கெழு	— Shadow cost coefficient
மாறி	— Variable
மிகை, மிகையான	— Positive
மிகை அரையுறுதியான இருபடி அமைப்பு	— Positive semidefinite quadratic form
மிகை உறுதியான இருபடி அமைப்பு	— Positive definite quadratic form
மீச்சிறு மதிப்பு	— Minimum value
மீச்சிறுமம்	— Minimum
மீப்பெரு மதிப்பு	— Maximum value
மீப்பெருமம்	— Maximum
முக்கோண அணி	— Triangular matrix
முடிவிலி	— Infinity
முதல் (இரண்டாம்) நிலை மாறி	— First (second) stage variable
முதன்மைப் பிரச்சினை	— Primal problem
முதன்மை மூலைவிட்டம்	— Principal diagonal
முதனிலை அடிப்படை	— Initial basis
முதனிலை செய்தக்க தீர்வு	— First feasible solution
முதனிலை தீர்வு	— Initial solution
முரண்பாட்டு முறை	— Method of contradiction, reduction ad absurdem method
முழு நீக்க முறை	— Complete elimination process
முழுவெண் தீர்வு	— Integer solution
முன்நோக்கு மாற்றம்	— Forward transformation
முன்னோடித் (சோதனை) தீர்வு	— Trial solution
மூலகம்	— Element
மூலைவிட்ட அணி	— Diagonal matrix
மைய உறுப்பு	— Pivotal term
மைய நிரல்	— Pivotal column
மைய நிரை	— Pivotal row
மையம்	— Pivot

ய

யூக்ளிட் வெளி	— Euclidean space

வ

வகைக்கத்தக்க, வகைபடு	—	Differentiable
வடமேற்கு மூலை விதி	—	North-west corner rule
வடிவகணித முறை	—	Geometrical method
வடிவகணித விளக்கம்	—	Geometrical interpretation
வரம்பற்ற (வரம்புக்குட்படாத)	—	Unbounded
வரம்புக்குட்பட்ட தீர்வு	—	Bounded solution
வர்க்க விலக்கச் சராசரி	—	Variance
வலப்புறம்	—	Right-hand side
விரிவாக்கிய அட்டவணை	—	Extended tableau
விருப்பப்படி (ஏதாயினும், ஏதாவது)	—	Arbitrary
விளைவு	—	Result
வீச்சு	—	Range
வீற்று மதிப்பு	—	Unique value
வெக்டர்	—	Vector
வெக்டர் வெளி	—	Vector space
வெட்டுந் தள முறை	—	Cutting plane method
வெளி	—	Space
வெளிப்படையாக	—	Explicitly
வெளிவரும் தகவல்கள்	—	Output
வெற்றுக் கணம்	—	Empty set

ஸ

ஸ்கேலார் (திசையிலி)	—	Scalar